

Н. М. МАТВЕЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Издание шестое,
исправленное и дополненное

Допущено Министерством высшего и среднего специального
образования СССР в качестве учебного пособия для студентов
вузов, обучающихся по специальности «Математика»

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1987

Рецензенты: кафедра дифференциальных уравнений Белорусского государственного университета; *Н. Ф. Отроков*, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой дифференциальных уравнений и математического анализа Горьковского государственного университета

Матвеев Н. М.

М 33 Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Для вузов.— 6-е изд., испр. и доп.— Мн.: Выш. шк., 1987.— 319 с.: ил.

Содержится более полутора тысяч задач и упражнений по всем разделам университетского курса обыкновенных дифференциальных уравнений. Приводятся краткие сведения из теории, типовые примеры, ответы и указания для решения наиболее трудных задач.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика».

1702050000—021
М ————— 23—87
М 304(03)—87

ББК 22.161.6я73

© Издательство «Высшая школа», 1977.
© Издательство «Высшая школа», 1987,
с исправлениями и дополнениями.

ОТ АВТОРА

Предлагаемый вниманию читателей сборник составлен на основании опыта проведения практических занятий по общему курсу обыкновенных дифференциальных уравнений на математико-механическом факультете и факультете прикладной математики — процессов управления Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова. В нем содержатся задачи и упражнения по курсу дифференциальных уравнений для университетов в объеме программы, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования СССР. Значительная часть задач и упражнений может быть использована в педагогических институтах и технических вузах с расширенной программой по математике.

Основная задача, которую ставил перед собой автор, заключается в обучении основным методам интегрирования наиболее часто встречающихся в теории дифференциальных уравнений и ее приложениях типов обыкновенных дифференциальных уравнений, а также в привлечении внимания читателя к вопросам общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, устанавливающей свойства решений по свойствам самих уравнений, с позиций которой исследуются свойства решений дифференциальных уравнений. В соответствии с этой задачей и для облегчения пользования сборником студентами-заочниками, а также теми, кто самостоятельно изучает теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, в нем кратко излагаются основные теоретические сведения, знание которых необходимо для решения задач. Подробное изложение этого материала читатель найдет в книгах, приведенных в списке рекомендуемой литературы, помещенном в конце сборника.

Сборник состоит из восьми глав. Основными являются первая, четвертая и шестая. Каждая глава, кроме восьмой, начинается вводным параграфом, в котором рассматриваются основные понятия и определения, а также общие вопросы, относящиеся к задачам этой главы. Затем идут параграфы, в которых содержатся уравнения определенного типа. Каждый из этих параграфов состоит из краткого изложения методов интегрирования уравнений рассматриваемого вида, решенных примеров и задач для самостоятельного решения. В каждой главе, за исключением восьмой, приводятся вопросы и задачи для повторения, которые могут быть использованы для самоконтроля.

В восьмой главе приводятся задачи нестандартного типа разной степени трудности по различным областям общей теории дифференциальных уравнений. Значительная часть таких задач может быть использована при написании рефератов, курсовых и дипломных работ.

В шестое издание внесены некоторые исправления и добавлены новые задачи.

Автор выражает благодарность рецензентам книги: коллективу кафедры дифференциальных уравнений Белорусского государственного университета, возглавляемому профессором Н. А. Лукашевичем, и заведующему кафедрой дифференциальных уравнений и математического анализа Горьковского государственного университета профессору Н. Ф. Отрокову.

Все отзывы и пожелания просьба присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

И. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие об обыкновенном дифференциальном уравнении первого порядка, разрешенном относительно производной, и его решении. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется равенство, содержащее независимую переменную x , неизвестную функцию y и ее производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Функцию F всюду, где не оговорено противное, мы предполагаем вещественной функцией от своих аргументов, которые тоже считаем вещественными.

Порядок старшей производной, входящей в уравнение (1), называется *порядком* этого уравнения.

Если уравнение (1) может быть приведено к такому виду, когда левая часть есть целая рациональная функция (полином) относительно всех входящих в него производных, то наивысшая степень старшей производной называется *степенью* уравнения.

Функция $y=y(x)$, обращающая уравнение (1) в тождество, называется *решением* уравнения (1), а график решения на плоскости (x, y) — *интегральной кривой*.

Процесс нахождения решений называется *интегрированием дифференциального уравнения*. Задача интегрирования дифференциального уравнения состоит в нахождении всех решений этого уравнения и изучении их свойств.

Уравнение первого порядка первой степени называется *уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной*. Его всегда можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (2)$$

Эту форму записи называют *нормальной формой* уравнения, разрешенного относительно производной. В дальнейшем мы будем предполагать, что правая часть уравнения (2) однозначна и непрерывна в рассматриваемой области изменения x, y . Если при этом функция $f(x, y)$ не определена в некоторой точке (x_0, y_0) , но существует ее конечный предел при $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$, то мы доопределяем функцию $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по непрерывности. Например,

для уравнения $y' = \sin x/x$ считаем $y' = 1$ при $x=0$. Аналогично мы поступаем при наличии хотя бы одностороннего предела. Так, для уравнения $y' = y \ln y$ полагаем $y' = 0$ при $y=0$.

Наряду с уравнением (2) будем рассматривать так называемое *перевернутое уравнение*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \quad (2')$$

используя его в окрестности тех точек, в которых $f(x, y)$ обращается в бесконечность. Множество таких точек (x, y) будем присоединять к области определения уравнения (2).

Таким образом, под *областью определения* уравнения (2) мы будем понимать объединение областей задания функций f и $1/f$. Например, областью определения уравнения $y' = 1/x$ является вся плоскость (x, y) .

Отметим другие записи уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Уравнения (2) и (2') можно заменить равносильным им одним уравнением $dy - f(x, y)dx = 0$.

К уравнениям вида (2) и (2') приводятся также уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

и так называемое *уравнение в симметрической форме*

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}.$$

Решением уравнения (2) в некотором интервале (a, b) изменения независимой переменной x (этот интервал может быть как конечным, так и бесконечным в одну или обе стороны, а также замкнутым с одного или обоих концов) называется функция $y = y(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая (т. е. имеющая непрерывную производную) в этом интервале и обращающая уравнение (2) в тождество, справедливое для всех значений x из интервала (a, b) . При этом предполагается, что точки $(x, y(x))$ лежат в области задания функции $f(x, y)$. Например, для уравнения

$$y' = -x/y \quad (4)$$

функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ будет решением в интервале $(-1, +1)$.

Решение может быть задано в *явном виде* $\Phi(x, y) = 0$. Так, уравнение (4) имеет решение $x^2 + y^2 = 1$ ($y > 0$).

Решение может быть задано также в *параметрической форме* уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ($\alpha < t < \beta$). Например, уравнение (4) имеет решение $x = \cos t$, $y = \sin t$ ($0 < t < \pi$).

Решения уравнения (2') присоединяются к решениям уравнения (2). Например, к решениям $y = \ln|x| + C$ уравнения $dy/dx = 1/x$ следует присоединить решение $x = 0$ перевернутого уравнения $dx/dy = x$.

Решением уравнения (3) называется функция $y=y(x)$ или $x=x(y)$, обращающая это уравнение в тождество.

Все интегральные кривые уравнения первого порядка являются *гладкими*, т. е. имеют непрерывно изменяющуюся касательную.

Поле направлений. Рассмотрим дифференциальное уравнение в виде (2) и обозначим через α угол между касательной к интегральной кривой $y=y(x)$ в точке (x, y) и положительным направлением

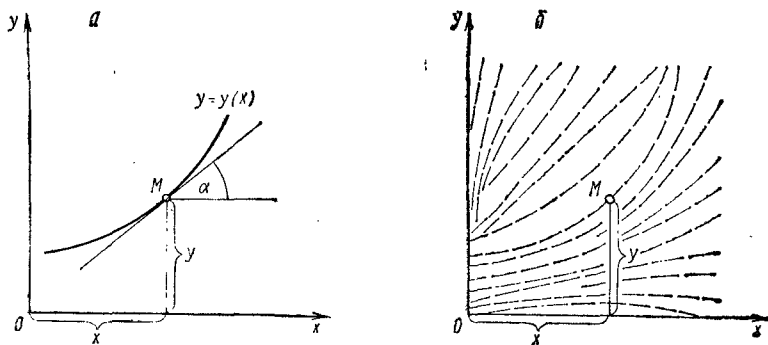


Рис. 1

оси Ox (рис. 1, а). Принимая во внимание, что $\operatorname{tg} \alpha = y'$, а $y' = f(x, y)$, получаем $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$, следовательно, направление касательных к интегральным кривым задается самим дифференциальным уравнением.

Проведя в каждой точке (x, y) из области задания функции $f(x, y)$ отрезок единичной длины (для определенности) с центром в этой точке, образующий с положительным направлением оси Ox угол α , где $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$, получим так называемое *поле направлений* (рис. 1, б).

Если в точке (x_0, y_0) правая часть уравнения (2) обращается в бесконечность, то направление поля параллельно оси Oy . В этом случае нужно рассматривать перевернутое дифференциальное уравнение (2').

Если же в точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ обращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$ и не может быть доопределена по непре-

рывности, то говорят, что в этой точке поле не определено, и называют ее *особой точкой* дифференциального уравнения (2). Если при этом существует интегральная кривая $y=y(x)$ ($x=x(y)$), обладающая свойством $y(x) \rightarrow y_0$ при $x \rightarrow x_0$ ($x(y) \rightarrow x_0$ при $y \rightarrow y_0$), то говорят, что она *примыкает* к точке (x_0, y_0) . В рассматриваемом случае само уравнение (2) не указывает наклона касательной в точке (x_0, y_0) к интегральной кривой, примыкающей к этой точке, что порождает особенности поведения интегральных кривых в окрестности особой точки (x_0, y_0) , обусловленные аналитической структурой правой части уравнения (2).

Изучая поле направлений, определяемое заданным дифференциальным уравнением, мы получаем некоторое представление об интегральных кривых этого уравнения, а иногда и сами интегральные кривые. Например, из рассмотрения соответствующих полей направлений ясно, что интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (5)$$

являются полупрямые (рис. 2):

$$y = Cx \quad (x \neq 0), \quad x = 0 \quad (y \neq 0), \quad (6)$$

где C — любое постоянное число, а интегральными кривыми уравнения (4) служат окружности с центром в начале координат (рис. 3)

$$x^2 + y^2 = C^2. \quad (7)$$

В точке $(0, 0)$ поля, определяемые уравнениями (4) и (5), не заданы. Из уравнений (6) и (7) ясно, что все интегральные кривые уравнения (5) примыкают к точке $(0, 0)$, в то время как ни одна из интегральных кривых уравнения (4) не примыкает к ней.

Если дифференциальное уравнение задано в виде (3), то его поле направлений не определено в точке (x_0, y_0) , в которой функ-

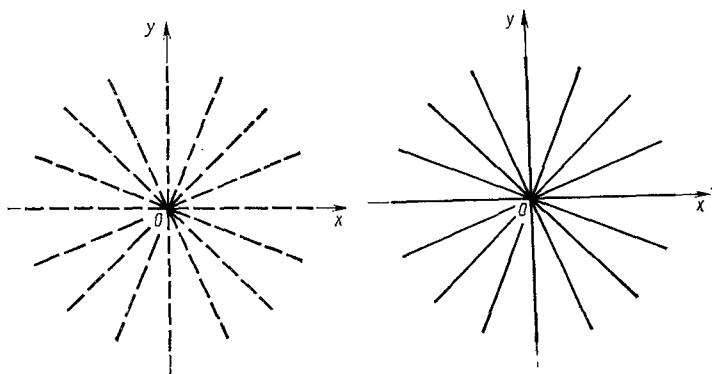


Рис. 2

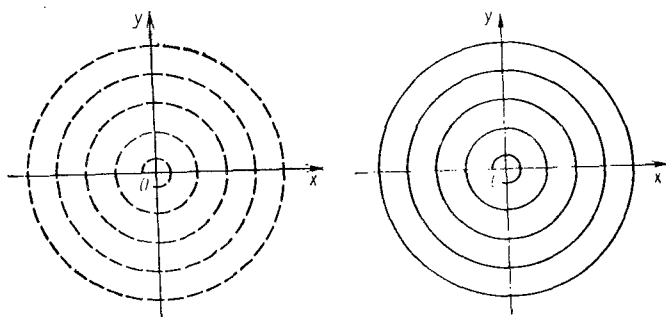


Рис. 3

ции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ одновременно обращаются в нуль. Эту точку будем называть *особой точкой* рассматриваемого уравнения (3).

При изучении поля направлений большой интерес представляют *изоклины* — линии, во всех точках которых направление поля одно и то же. Так, для уравнений (4) и (5) изоклинами служат полу-прямые, выходящие из начала координат: для первого из них эти изоклины являются интегральными кривыми, а для второго ни одна изоклина не является интегральной кривой. Для уравнения $y' = ty$, изоклинами которого являются прямые $y = b$, только одна изоклина $y = 0$ — интегральная кривая (почему?).

Изоклинами уравнения

$$y' = x^2 + y^2 \quad (8)$$

являются окружности $x^2 + y^2 = R^2$, поэтому, например, все интегральные кривые этого уравнения в точках пересечения с окружностью $x^2 + y^2 = 1$ наклонены к оси Ox под углом $\pi/4$ (рис. 4).

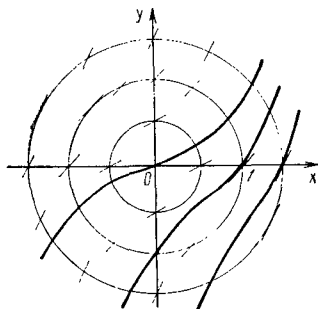


Рис. 4

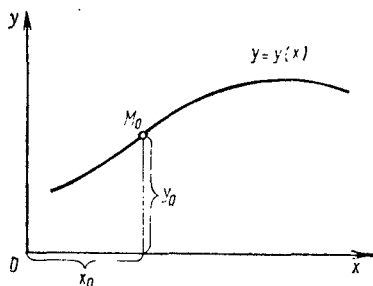


Рис. 5

Из аналитического вида правой части уравнения (8) ясно, что интегральная кривая, проходящая через начало координат, касается в этой точке оси Ox . Очевидно также, что каждое решение уравнения (8) есть возрастающая функция от x (на всем интервале существования решения). Таким образом, интегральная кривая, проходящая через начало координат, имеет вид, указанный схематически на рис. 4.

В простейших случаях удастся по аналитическому виду правой части уравнения (2) найти *линии экстремумов* и *линии точек перегиба* (линии, во всех точках которых интегральные кривые имеют экстремум или перегиб). На них соответственно $f(x, y) = 0$, $f'_x + f'_y f = 0$ (если функция f непрерывно дифференцируема). Изоклины вместе с линиями экстремумов и точек перегиба дают возможность построить схематически графики интегральных кривых данного уравнения. При этом непосредственной подстановкой в дифференциальное уравнение следует проверять, не являются ли изоклины, линии экстремумов и линии точек перегиба интегральными кривыми.

Задача Коши. Во многих вопросах теоретического и прикладного характера требуется среди всех решений дифференциального уравнения (2) найти решение

$$y = y(x), \quad (9)$$

удовлетворяющее условию

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \quad (10)$$

где x_0 и y_0 — заданные числа, т. е. такое решение (9), в котором функция $y(x)$ принимает заданное значение y_0 , если независимую переменную x заменить заданным значением x_0 , так что $y(x_0) = y_0$.

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 5).

Условие (10) называется *начальным условием* решения (9), а числа x_0 и y_0 — *начальными данными* этого решения. Обычно числа x_0 и y_0 предполагаются конечными.

Задача нахождения решения, удовлетворяющего заданному начальному условию (10), называется *задачей Коши (начальной задачей)*.

Например, решением уравнения $y' = 2x$, удовлетворяющим начальному условию $y = 1$ при $x = 0$, будет $y = x^2 + 1$. Это — парабола, проходящая через точку $M(0, 1)$ (рис. 6).

В случае, когда в точке (x_0, y_0) правая часть уравнения (2) обращается в бесконечность, рассматривают первернутое уравнение (2') и ищут интегральную кривую, проходящую через эту точку, в виде $x = x(y)$.

Вообще решение задачи Коши для уравнения в любой из форм его записи ищут в том виде, в каком это оказывается наиболее удобно, т. е. в виде $y = y(x)$, $x = x(y)$, $F(x, y) = 0$ или в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Задача Коши для уравнения (2) с начальными данными x_0, y_0 , согласно теореме Пеано, имеет решение, если точка (x_0, y_0) лежит в области задания и непрерывности правой части этого уравнения. Единственность решения только при соблюдении одного этого условия не гарантируется.

Чтобы гарантировать не только существование, но и единственность решения задачи Коши, достаточно, согласно теореме Пикара, предположить дополнительно, что правая часть уравнения (2) удовлетворяет условию Липшица относительно y в некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0) , в частности, что она имеет в этой окрестности ограниченную частную производную по y . Например, так обстоит дело, если правая часть уравнения (2) есть полином относительно x и y . При этом начальную точку (x_0, y_0) можно выбирать произвольно.

Единственность решения задачи Коши также заведомо имеет место, если функция $f(x, y)$ есть полином только относительно y , причем коэффициенты этого полинома — непрерывные функции от x . Но при этом только y_0 можно задавать произ-

вольтно, а x_0 должно лежать внутри интервала непрерывности коэффициентов.

Если уравнение имеет вид (3), где M и N — полиномы, то существует единственное решение с начальными данными x_0, y_0 , при условии, что в точке (x_0, y_0) функции M и N не обращаются одновременно в нуль. В противном случае начальные данные x_0, y_0 называются *особыми* и не гарантируются ни существование, ни единственность решения задачи Коши.

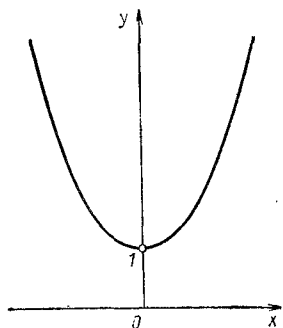


Рис. 6

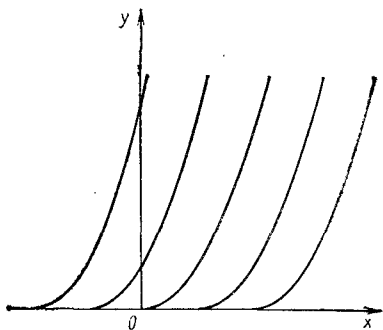


Рис. 7

Точки, в которых $f(x, y)$ непрерывна, а $\partial f / \partial y$ обращается в бесконечность, будем называть *особыми точками* уравнения (2). В этих точках может быть нарушена единственность решения задачи Коши. Например, для уравнения

$$y' = 2\sqrt{y} \quad (11)$$

такими точками будут все точки оси Ox .

Решение задачи Коши стараются найти в элементарных функциях или в квадратурах от элементарных функций. Если это не удастся, приходится искать решение в другом виде или прибегать к приближенным методам интегрирования. В последнем случае предварительно устанавливается существование и единственность решения рассматриваемой задачи Коши.

Общее решение. Общее решение в форме Коши. Общий интеграл. Общее решение в параметрической форме. Пусть функция

$$y = \varphi(x, C) \quad (12)$$

определена в некоторой области изменения переменных x и C и имеет непрерывную частную производную по x . Эта функция называется *общим решением* уравнения (2) в заданной области D изменения переменных x и y , в каждой точке которой решение задачи Коши существует и единственно, если равенство (12) разрешимо в области D относительно произвольной постоянной C , т. е.

$$C = \psi(x, y), \quad (13)$$

и функция (12) является решением уравнения (2) при всех значениях произвольной постоянной C , доставляемых формулой (13), когда точка (x, y) пробегает область D . Отметим, что D есть вся область существования и единственности для уравнения (2) или ее часть. Например, для уравнения (11) общим решением в области $|x| < +\infty, 0 < y < +\infty$ будет (рис. 7) $y = (x+C)^2, x > -C$.

Чтобы найти решение уравнения (2) с начальными данными x_0, y_0 из области D с помощью формулы общего решения (12), поступают следующим образом:

1) подставляют в формулу (12) вместо x и y числа x_0 и y_0 :

$$y_0 = \varphi(x_0, C); \quad (12')$$

2) решают уравнение (12') относительно C и находят $C = C_0$;

3) подставляют полученное значение C в формулу (12):

$$y = \varphi(x, C_0).$$

Это и есть искомое решение. Оно будет единственным. Общее решение

$$y = y(x, x_0, y_0),$$

в котором роль произвольной постоянной играет начальное значение y_0 искомой функции y при фиксированном значении x_0 независимой переменной x , называется *общим решением в форме Коши*.

Если общее решение уравнения (2) задано в неявном виде

$$\Phi(x, y, C) = 0 \text{ или } \psi(x, y) = C,$$

то оно называется *общим интегралом* этого уравнения. Так, для уравнения (4) общим интегралом будет соотношение (7).

Если функция (12), являющаяся общим решением уравнения (2), задана в параметрическом виде

$$x = \varphi(t, C), \quad y = \psi(t, C), \quad (14)$$

то уравнения (14) называются *общим решением уравнения (2) в параметрической форме*. Например, для уравнения (4) общим решением в параметрической форме будет $x = C \cos t, y = C \sin t$.

Если дано однопараметрическое семейство кривых, например в виде (12), то, дифференцируя его по x и исключая из найденного уравнения и уравнения (12) параметр C , мы получим, вообще говоря, дифференциальное уравнение первого порядка, называемое *дифференциальным уравнением данного семейства кривых*.

Частное решение. Решение, в каждой точке которого сохраняется единственность решения задачи Коши, т. е. через эту точку в достаточно малой окрестности ее проходит только одна интегральная кривая, называется *частным решением*. Если функция (12) есть общее решение уравнения (2) в области D , то всякое решение, содержащееся в формуле (12) при конкретном (допустимом) числом значений произвольной постоянной C , является *частным*. При этом не исключаются и значения $C = \pm \infty$. Заметим, что *част-*

ное решение не может быть ни линией экстремумов, ни линией точек перегиба интегральных кривых уравнения (2) (почему?).

Особое решение. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым*. Особое решение не содержится в формуле общего решения ни при каком числовом значении произвольной постоянной, включая $C = \pm \infty$. Особое решение вида $y = y(x)$ ($x = x(y)$) может получаться из формулы общего решения лишь при $C = C(x)$ ($C = C(y)$).

Если правая часть уравнения (2) непрерывна и имеет частную производную по y (ограниченную или нет), то особыми решениями могут быть только те кривые, во всех точках которых dj/du обращается в бесконечность. Эти кривые будем называть *подозрительными на особое решение*. При этом кривая, подозрительная на особое решение, будет особым решением, если: 1) она является интегральной кривой; 2) в каждой ее точке нарушается единственность решения задачи Коши. Отсюда, в частности, следует, что уравнение (2), в котором $f(x, y)$ есть полином относительно x и y , не может иметь особых решений. Например, таким будет уравнение (8).

Если правая часть уравнения (2) есть частное двух полиномов

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

то уравнение (2) тоже не имеет особых решений (почему?). Оно может иметь только особые точки, т. е. точки, в которых P и Q одновременно обращаются в нуль. Например, таким уравнением будет

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy} \quad (ad - bc \neq 0).$$

Уравнение вида (3), в котором M и N суть полиномы, тоже не имеет особых решений (почему?). Например, это будет справедливо для уравнения $x^2(y+1)dx + (x^3-1)(y-1)dy=0$.

Если семейство интегральных кривых вида $y = \varphi(x, C)$ или $\Phi(x, y, C) = 0$ имеет *огигающую*, т. е. такую кривую, которая касается каждой кривой семейства в одной или нескольких точках и вся состоит из этих точек касания, то последняя всегда является решением дифференциального уравнения, и притом особым. В самом деле, во-первых, огигающая является интегральной кривой (почему?); во-вторых, в каждой точке огигающей нарушается единственность решения задачи Коши.

Огибающей семейства кривых может быть только *дискриминантная кривая этого семейства*, т. е. кривая, определяемая уравнением самого семейства и уравнением, полученным дифференцированием его по параметру. Дискриминантная кривая семейства интегральных кривых определяется из системы

$$y = \varphi(x, C), \quad 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial C} \quad \text{или} \quad \Phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0.$$

Найдя дискриминантную кривую, нужно проверять, будет ли она (или ее часть) огибающей данного семейства (или части его).

Особое решение всегда можно обнаружить в процессе построения общего решения (общего интеграла) данного дифференциального уравнения. Это те интегральные кривые, которые могут быть потеряны при преобразованиях данного уравнения, переводящих это уравнение в его общее решение (общий интеграл).

Дифференциальное уравнение может иметь решения, которые не являются ни частными, ни особыми. Например, такими будут решения, «склеенные» из отрезков частных и особых решений. Возможна также «склейка» двух частных решений в точке неединственности решения задачи Коши.

Понятие об интеграле дифференциального уравнения. Функция $\psi(x, y)$, непрерывно дифференцируемая в области D ($\psi(x, y) \in \in C^1(D)$), такая, что $\partial\psi/\partial y \neq 0$ в D , называется *интегралом* уравнения (2) в области D , если ее полный дифференциал в силу уравнения (2) — $(d\psi|_{(2)})$ — тождественно равен нулю в D , т. е.

$$d\psi|_{(2)} = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} f(x, y) dx \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in D. \quad (15)$$

(В выражении полного дифференциала функции $\psi(x, y)$ мы заменили dy его значением из уравнения (2).) Например, функция

$$\psi = y/x \quad (16)$$

является интегралом уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (17)$$

в правой полуплоскости ($x > 0$), так как

$$d\psi|_{(17)} = -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} \frac{y}{x} dx \equiv 0 \quad (x > 0).$$

При определенных условиях на правую часть уравнения (2) интеграл $\psi(x, y)$ в некоторой области D существует, причем если ψ_1 и ψ_2 — интегралы уравнения (2), определенные в одной и той же области, то они функционально зависимы: $\psi_2 = \Phi(\psi_1)$.

Связь между обыкновенным дифференциальным уравнением и уравнением с частными производными. Из тождества (15) следует, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial\psi}{\partial y} \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in D,$$

так что интеграл ψ уравнения (2) является решением уравнения с частными производными

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

в области D .

Обратно, если мы имеем нетривиальное решение $z = \psi(x, y) \neq \text{const}$ уравнения (18) в области D , причем $z = \psi(x, y) \in C^1(D)$, $\partial\psi/\partial y \neq 0$ в D , то функция $\psi(x, y)$ будет интегралом уравнения (2) в области D (почему?). Уравнение (18) называется *уравнением с частными производными, соответствующим обыкновенному дифференциальному уравнению* (2). Например, уравнению (17) соответствует уравнение с частными производными $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Очевидно,

что интеграл (16) является решением этого уравнения.

Интегрируемость в квадратурах. Если общее решение (общий интеграл) представлено в виде квадратур от элементарных функций и функций, входящих в состав дифференциального уравнения, то говорят, что *уравнение проинтегрировано в квадратурах*.

Выясняя вопрос об интегрируемости данного дифференциального уравнения в квадратурах, нужно рассмотреть все формы записи этого уравнения, указанные ранее, принимая за искомую функцию как y , так и x .

В следующих параграфах рассматриваются уравнения, интегрируемые в элементарных функциях или квадратурах. При этом мы ограничиваемся в большинстве случаев формальным интегрированием, в частности не всегда указываем область задания общего решения.

Если данное уравнение не интегрируется в квадратурах (или выполнение квадратур затруднительно), решение задачи Коши обычно находят методом последовательных приближений или при помощи степенных рядов.

Метод последовательных приближений (метод Пикара). Пусть поставлена задача Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (19)$$

Справедлива теорема Пикара: *если $f(x, y)$ определена и непрерывна в области*

$$R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \quad (a > 0, b > 0)$$

и удовлетворяет в этой области условию Липшица относительно y , то задача Коши (19) имеет единственное решение, которое будет заведомо определено в интервале

$$|x - x_0| \leq h, \quad (20)$$

где $h = \min(a, b/M)$; $|f(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in R$.

Рассмотрим *интегральное уравнение*

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx,$$

соответствующее задаче Коши (19). Применим для его решения метод последовательных приближений.

За исходное (нулевое) приближение возьмем функцию $y_0(x) \equiv y_0$. Последовательные приближения определим рекуррентной формулой

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx \quad (n=1, 2, \dots).$$

Эти приближения заведомо сходятся к решению задачи Коши (19) в интервале (20). Однако во многих случаях решение удается продолжить за пределы этого интервала.

Нахождение решения задачи Коши с помощью степенного ряда. Справедлива теорема Коши: *если правая часть уравнения (2) представима в виде*

$$f(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} (x - x_0)^m (y - y_0)^n, \quad |x - x_0| < \rho, \quad |y - y_0| \leq r,$$

то решение задачи Коши (19) существует, единственно и представимо в виде

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < \rho_1 < \rho. \quad (21)$$

Такие решения называются *голоморфными* в точке x_0 .

Коэффициенты c_k могут быть найдены последовательным дифференцированием обеих частей уравнения (2) или методом неопределенных коэффициентов.

2. УРАВНЕНИЕ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЕ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ

Общее решение. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \quad (1)$$

Если f определена и непрерывна в интервале (a, b) , то

$$y = \int f(x) dx + C, \quad (2)$$

где первый член справа — некоторая фиксированная первообразная функция для функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная, есть общее решение уравнения (1) в области

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty, \quad (3)$$

так что вся эта область (рис. 8) заполнена непересекающимися интегральными кривыми уравнения (1), причем каждая из них представляет собой график частного решения этого уравнения.

Из формулы (2) ясно, что все интегральные кривые уравнения

(1), входящие в общее решение, получаются из какой-либо одной сдвигом вдоль оси Oy .

Формула (2) дает возможность найти единственное решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 из полосы (3) (так что x_0 можно брать только из интервала (a, b) , а y_0 — любое фиксированное число), выбрав соответствующее значение произвольной постоянной C . Чтобы определить это значение, нужно (см. § 1) заменить в формуле (2) переменные x и y их начальными значениями

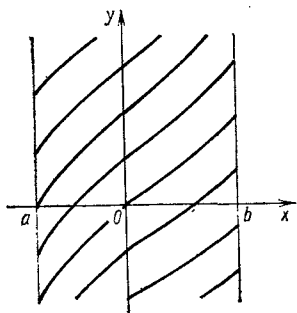


Рис. 8

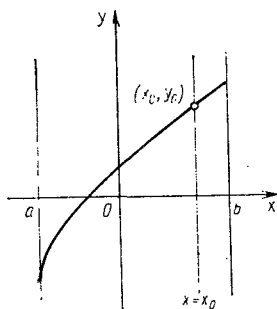


Рис. 9

ми x_0 и y_0 . Решив полученное уравнение, мы найдем $C = C_0$. Решение с начальными данными x_0, y_0 имеет вид

$$y = \int f(x) dx + C_0. \quad (4)$$

Это решение определено и непрерывно дифференцируемо на всем интервале (a, b) , т. е. на всем интервале непрерывности правой части уравнения (1).

Если в качестве первообразной $\int f(x) dx$ в формуле (2) взять функцию $\int_{x_0}^x f(x) dx$, где x_0 — некоторое фиксированное число из интервала (a, b) , общее решение (2) примет вид

$$y = \int_{x_0}^x f(x) dx + C. \quad (5)$$

Запись общего решения в виде (5) по необходимости используется в тех случаях, когда первообразная в общем решении (2) не выражается через элементарные функции. Если при этом требуется не только проинтегрировать уравнение (1), но и решить задачу Коши, в качестве нижнего предела x_0 берут начальное значение независимой переменной x .

Положив в формуле (5) $x = x_0, y = y_0$, получим $C = y_0$, следовательно, можно записать:

$$y = \int_{x_0}^x f(x) dx + y_0. \quad (6)$$

Это решение уравнения (1) с начальными данными x_0, y_0 .

Если же в формуле (6) считать y_0 произвольным, то она представляет общее решение в форме Коши уравнения (1) в области (3).

Все интегральные кривые семейства (6) пересекают прямую $x=x_0$ в точках вида (x_0, y_0) (рис. 9), следовательно, произвольная постоянная y_0 в общем решении (6) есть ордината соответствующей точки пересечения. Изменяя непрерывным образом эту ординату, мы получим все семейство интегральных кривых.

Из формулы (6) ясно, что решение задачи Коши есть непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция от независимой переменной x и начальных данных x_0 и y_0 в области $a < x < b, a < x_0 < b, |y_0| < +\infty$.

Особые решения. Если $f(x)$ разрывна в точке $x=\xi$, лежащей внутри интервала (a, b) , причем обращается в бесконечность именно в этой точке и непрерывна во всех других точках интервала (a, b) , то формула (2) дает общее решение уравнения (1) в каждой из областей (рис. 10) $a < x < \xi, |y| < +\infty$ и $\xi < x < b, |y| < +\infty$.

Прямая $x=\xi$ является решением перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}$$

и должна быть присоединена к решениям уравнения (1). Это решение может оказаться особым (рис. 10, а), если в каждой его точке нарушается единственность. Если же единственность сохраняется во всех точках этого решения, оно будет частным (рис. 10, б).

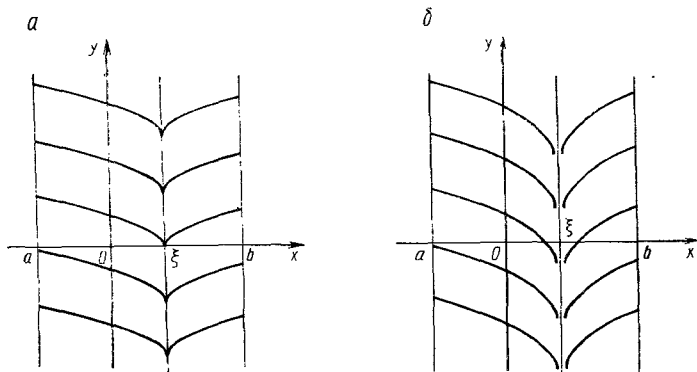


Рис. 10

По отношению к семейству интегральных кривых, образующих общее решение, прямая $x=\xi$ будет или огибающей (когда $x=\xi$ — особое решение), или асимптотой (если $x=\xi$ — частное решение).

Поле направлений. Из уравнения (1) ясно, что во всех точках прямой $x=x_0$ ($a < x_0 < b$), параллельной оси Oy , направление поля одно и то же: $\operatorname{tg} \alpha = f(x_0)$, поэтому каждая такая прямая является изоклиной. Отсюда, не интегрируя уравнение (1), мы

видим, что если $f(x)$ непрерывна в (a, b) , то все интегральные кривые этого уравнения получаются из одной сдвигом вдоль оси Oy .

Если $f(x)$ сохраняет знак в (a, b) , то каждое решение представляет собой монотонную функцию, возрастающую при $f(x) > 0$ и убывающую при $f(x) < 0$.

Если $f(x)$ обращается в нуль в некоторой точке $x=c$ из (a, b) и имеет противоположные знаки при $x < c$ и $x > c$, то каждая интегральная кривая уравнения (1) будет иметь в точке $x=c$ экстремум. В этом случае прямая $x=c$ будет линией максимумов или линией минимумов интегральных кривых.

Предположим, что $f(x)$ дифференцируема в (a, b) . Если при этом $f'(x)$ сохраняет знак, то каждая интегральная кривая имеет одно и то же направление вогнутости во всех точках интервала (a, b) . Если же $f'(x)$ обращается в нуль в некоторой точке $x=d$, из (a, b) и имеет противоположные знаки при $x < d$ и $x > d$, то каждая интегральная кривая уравнения (1) будет иметь в точке $x=d$ перегиб, поэтому прямая $x=d$ является линией точек перегиба интегральных кривых.

Примеры. 1. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2. \quad (7)$$

Правая часть его непрерывна при всех значениях x . Функция

$$y = x^3 + C \quad (8)$$

есть общее решение уравнения (7) в области

$$|x| < +\infty, |y| < +\infty. \quad (9)$$

Особых решений нет.

Общим решением в форме Коши (в той же области) будет

$$y = \int_{x_0}^x 3x^2 dx + y_0 \text{ или } y = x^3 - x_0^3 + y_0. \quad (10)$$

В частности, если взять $x_0=0$, получим $y=x^3+y_0$, что совпадает с функцией (8) с той лишь разницей, что здесь вместо C стоит y_0 .

Решение (10) является непрерывной функцией от x , x_0 и y_0 при всех x , x_0 , y_0 .

Найдем решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y = 2 \text{ при } x = 1. \quad (11)$$

Так как точка $(1, 2)$ лежит внутри области (9), то существует единственное решение, удовлетворяющее начальному условию (11). Это решение частное (почему?). Его можно найти, используя общее решение в виде (8) или общее решение в форме Коши (10). Подставляя в формулу (8) $x=1$, $y=2$, находим $C=1$, откуда искомым решением будет $y=x^3+1$.

Полагая в формуле (10) $x_0=1$, $y_0=2$, находим

$$y = \int_1^x 3x^2 dx + 2 \text{ или } y = x^3 + 1.$$

Интегральные кривые (рис. 11) получаются из кубической параболы $y=x^3$ сдвигом вдоль оси Oy . Они не имеют экстремумов, ибо правая часть урав-

нения (7) хотя и обращается в нуль в точке $x=0$, но сохраняет один и тот же знак во всех других точках, вследствие чего интегральные кривые возрастают во всей области определения. Так как $f'(x)=6x$ обращается в нуль в точке $x=0$ и меняет знак при переходе через нее, каждая интегральная кривая имеет в этой точке перегиб, следовательно, ось Oy будет линией точек перегиба интегральных кривых.

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}.$$

Правая часть его, так же как и в предыдущем примере, определена и непрерывна при всех x . Общим решением уравнения в области (9) будет

$$y = -e^{-x} + C.$$

Особых решений нет.

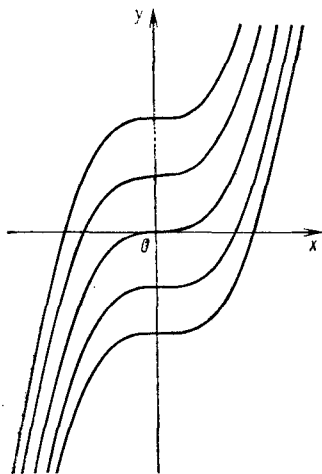


Рис. 11

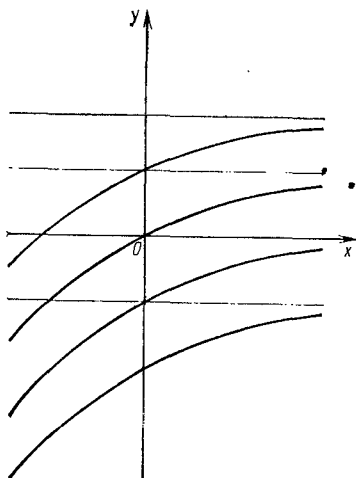


Рис. 12

Интегральные кривые (рис. 12) не имеют ни точек экстремума, ни точек перегиба. У каждой интегральной кривой есть своя горизонтальная асимптота. Например, для интегральной кривой $y=-e^{-x}$ горизонтальной асимптотой будет ось Ox .

3. Дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{x}.$$

Считаем, что при $x=0$ правая часть его равна 1. Общим решением уравнения в области (9) будет

$$y = \int \frac{\sin x}{x} dx + C$$

или (в форме Коши)

$$y = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx + y_0. \quad (12)$$

Особых решений нет.

В элементарных функциях общее решение не выражается. Все решения определены и непрерывны при всех значениях x . Прямые $x=k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) являются линиями экстремумов интегральных кривых, ось Oy — линией точек пе-

егиба. Из формулы (12) видно, что каждая интегральная кривая имеет свою горизонтальную асимптоту, так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \pi/2 + y_0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\pi/2 + y_0$, ибо

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (почему?). В частности, горизонтальными асимптотами интегральной кривой, проходящей через начало координат, будут прямые $y = \pm \pi/2$.

4. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad (13)$$

Правая часть его определена и непрерывна в каждом из интервалов $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ и обращается в бесконечность при $x = 0$. Формула

$$y = \ln |x| + C$$

даст общее решение уравнения (13) в каждой из областей $-\infty < x < 0$, $|y| < +\infty$ и $0 < x < +\infty$, $|y| < +\infty$ (см. рис. 13).

Прямая $x=0$ является решением перевернутого уравнения, притом частным (почему?), и асимптотой интегральных кривых уравнения (13).

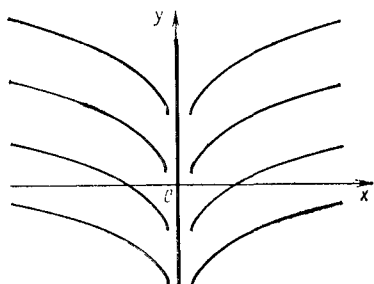


Рис. 13

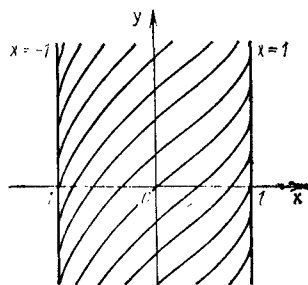


Рис. 14

5. Дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (14)$$

Правая часть его определена и непрерывна в интервале $(-1, +1)$. Общим решением уравнения в области $|x| < 1$, $|y| < +\infty$ будет (см. рис. 14)

$$y = \arcsin x + C \quad (15)$$

Правая часть уравнения (14) обращается в бесконечность при $x = \pm 1$. Прямые $x = \pm 1$ — особые решения уравнения (14) (почему?). Они являются огибающими семейства (15).

6. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых

$$y = \sqrt{x} + C \quad (16)$$

Продифференцировав обе части уравнения (16) по x , получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (17)$$

Это и есть дифференциальное уравнение семейства (16). Интегральными кривыми этого уравнения будут кривые данного семейства и их огибающая $x=0$ (рис. 15), которая является особым решением уравнения (17).

7. Найти кривые, у которых тангенс угла α между касательной и положи-

тельным направлением оси Ox равен абсциссе точки касания. Выделить интегральную кривую, проходящую через начало координат.

Пусть $y = \varphi(x)$ — уравнение искомой кривой (рис. 16). Тогда $\operatorname{tg} \alpha = y'$. По условию задачи $\operatorname{tg} \alpha = x$. Заменяя $\operatorname{tg} \alpha$ на y' , приходим к дифференциальному уравнению $dy/dx = x$. Его общим решением будет

$$y = x^2/2 + C. \quad (18)$$

Оно определено на всей плоскости (x, y) и представляет собой семейство парабол с вершинами на оси Oy (рис. 17). Чтобы выделить интегральную кривую, проходящую через начало координат, положим в формуле (18) $x=0, y=0$. Получим $C=0$, следовательно, искомой кривой является парабола $y=x^2/2$.

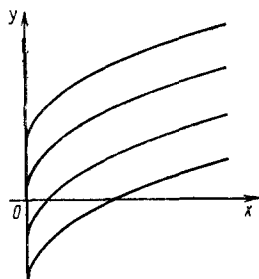


Рис. 15

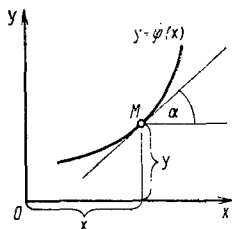


Рис. 16

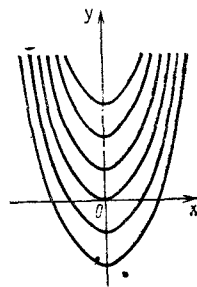


Рис. 17

8. Найти закон движения точки по оси Ox , если скорость движения есть заданная функция времени $\dot{f}(t)$ и в момент $t=t_0$ точка занимает положение $x=x_0$.

Обозначим положение точки в момент времени t через x . Дифференциальным уравнением задачи будет $dx/dt = \dot{f}(t)$. Записывая общее решение в форме Коши, находим, что искомый закон движения

$$x = \int_{t_0}^t \dot{f}(t) dt + x_0.$$

9. Дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} x^{-1/3}. \quad (19)$$

Определить его область задания, область существования решения задачи Коши, область существования и единственности; изучить поле направлений, определяемое им (найти изоклины, указать области возрастания и убывания решений, найти линии экстремумов, установить направление вогнутости и пайти линии точек перегиба); сделать схематический набросок семейства интегральных кривых; проинтегрировать уравнение, найдя все решения; изучить поведение интегральных кривых по аналитическому виду семейства интегральных кривых; сделать рисунок.

Правая часть уравнения (19) задана на всей плоскости (x, y) , кроме оси Oy ($x=0$). В точках оси Oy нужно рассматривать перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2} x^{1/3}. \quad (20)$$

Таким образом, уравнение (19) задано на всей плоскости (x, y) .

Так как правая часть уравнения (19) определена и непрерывна при всех x , не равных нулю, то в каждой из областей

$$G_1: -\infty < x < 0, |y| < +\infty; \quad (21)$$

$$G_2: 0 < x < +\infty, |y| < +\infty. \quad (22)$$

рис. 18) имеют место существование и единственность решения задачи Коши. При этом решения будут определены соответственно в интервалах:

$$-\infty < x < 0; \quad (23)$$

$$0 < x < +\infty. \quad (24)$$

В точках оси Oy гарантируется только существование, но не единственность решения задачи Коши (почему?).

Изоклинами уравнения (19) являются прямые $x=a$, где a — любое число. При этом изоклина $x=0$ ($y'=\infty$) является решением перевернутого уравнения (20).

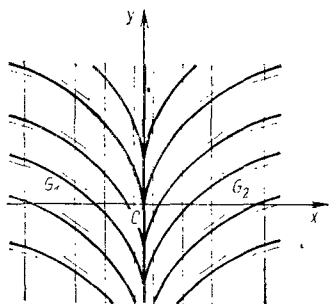


Рис. 18

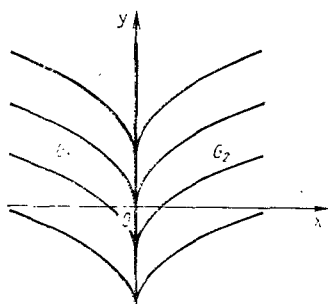


Рис. 19

В левой полуплоскости (21) все интегральные кривые убывают, в правой полуплоскости (22) — возрастают (почему?). Линий экстремумов нет.

Все интегральные кривые уравнения (19) в каждой из областей их задания (23) и (24) вогнуты вниз, ибо $y'' < 0$ при $x \neq 0$. Поэтому линий точек перегиба нет.

Так как $y' \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow +\infty$, то направления касательных к интегральным кривым при $|x| \rightarrow +\infty$ приближаются к направлению оси Ox . Схематический набросок семейства интегральных кривых дан на рис. 18.

Интегрируя уравнение (19), получаем

$$y = x^{2/3} + C. \quad (25)$$

Эта формула дает общее решение уравнения (19) в каждой из областей (21) и (22). К решениям (25) нужно присоединить решение $x=0$ перевернутого уравнения (20). Это решение будет особым, так как в каждой точке его нарушается единственность (почему?).

Из аналитического вида семейства интегральных кривых (25) ясно, что они симметричны относительно оси Oy и обладают свойством $y \rightarrow +\infty$ при $|x| \rightarrow +\infty$, т. е. неограниченно возрастают при $|x| \rightarrow +\infty$.

Интегральные кривые уравнения (19) вместе с решением $x=0$ перевернутого уравнения (20) изображены на рис. 19.

В задачах 1 — 29 проинтегрировать уравнение.

1. $y' = \cos^2 x.$
2. $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}.$
3. $y' = \sin^3 x.$
4. $y' = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}.$
5. $y' = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}.$
6. $y' = \sqrt{1 - x^2}.$
7. $y' = \frac{x}{1 + x^2 + \sqrt{1 + x^2}}.$
8. $y' = x \cos x.$
9. $y' = x^2 e^x.$

$$10. y' = 2e^x \cos x. \quad 11. y' = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}. \quad 12. y' = \sin x \cos 3x.$$

$$13. y' = \operatorname{sh} x. \quad 14. y' = \frac{1}{x^2 - 1}. \quad 15. y' = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$16. y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}. \quad 17. y' = \operatorname{ctg} x. \quad 18. y' = \frac{\ln x}{x}.$$

$$19. y' = x/\ln x. \quad 20. y' = e^x/x. \quad 21. y' = 1/\ln x.$$

$$22. y' = \frac{1}{\sqrt{x + x^2}}. \quad 23. y' = \frac{2}{x\sqrt{x^4 - 1}}. \quad 24. y' = \ln x + 1.$$

$$25. y' = \frac{x}{x^3 - 1}. \quad 26. y' = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)(x^2 + 1)}.$$

$$27. y' = \frac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2}. \quad (\text{Указание. Воспользоваться формулой}$$

Остроградского

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx,$$

где $Q(x) = (x - a)^k \dots (x^2 + px + q)^m \dots$ ($k, \dots, m, \dots$ — натуральные числа); $Q_1(x) = (x - a)^{k-1} \dots (x^2 + px + q)^{m-1} \dots$; $Q_2(x) = (x - a) \dots (x^2 + px + q) \dots$; $P_1(x), P_2(x)$ — полиномы с неопределенными коэффициентами, степени которых соответственно на единицу ниже степеней полиномов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$.)

$$28. y' = |x|. \quad 29. y' = \frac{\cos x}{x}.$$

В задачах 30—35 проинтегрировать уравнение и выделить интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M(x_0, y_0)$, выяснив предварительно вопрос о существовании и единственности ее, о направлении касательной и направлении вогнутости интегральной кривой в точке M ; в задачах 30 и 35 сделать два рисунка (схематический предварительный рисунок и график найденного решения).

$$30. y' = 2xe^{-x^2}; M(0, -1). \quad 31. y' = \frac{1}{\sin x}; M\left(\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

$$32. y' = -\frac{1}{x^2}; M(1, 1), M(-1, -1), M(0, 1).$$

$$33. y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}; M(1, 1).$$

$$34. y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; M(0, -1), M(0, 1), M(1, 0).$$

$$35. y' = e^{-x^2}; M(0, 0).$$

В задачах 36—41 найти решения вида $x=a$, присоединяемые к решениям данного дифференциального уравнения.

$$36. y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$37. y' = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$38. y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

$$39. y' = e^x.$$

$$40. y' = \frac{1}{x-1}.$$

$$41. y' = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}.$$

В задачах 42—47 найти вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты интегральных кривых, проходящих через заданную точку $M(x_0, y_0)$; сделать рисунки.

$$42. y' = -2xe^{-x^2}; M(0, 1).$$

$$43. y' = \frac{1}{1+x^2}; M(0, 0).$$

$$44. y' = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}; M(0, -1).$$

$$45. y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}; M(1, 0).$$

$$46. y' = e^{-x^2}; M(0, 0). \text{ (Указание. Воспользоваться несобст-} \\ \text{венным интегралом } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.)$$

$$47. y' = \frac{1}{\cos^2 x}; M(0, 0).$$

В задачах 48—61 определить область задания уравнения, область существования решения задачи Коши, область существования и единственности, указать особые линии; изучить поле направлений, определяемое этим дифференциальным уравнением (найти изоклины, построить изоклины $y'=0$, $y'=\pm 1$, $y'=\infty$, определить направление поля в точках, лежащих на осях координат, указать области возрастания и убывания решений, найти линии экстремумов, установить направление вогнутости и найти линии точек перегиба, сделать рисунок); сделать схематический набросок семейства интегральных кривых; проинтегрировать уравнение, найдя все решения; изучить поведение интегральных кривых в окрестности особых линий, на границе области задания уравнения и на бесконечности по аналитическому виду семейства интегральных кривых; сделать рисунок.

$$48. y' = 0.$$

$$49. y' = 1.$$

$$50. y' = -1.$$

$$\begin{aligned}
 51. y' &= -2x. & 52. y' &= -x^2. & 53. y' &= \frac{3}{2} \sqrt{x}. \\
 54. y' &= -2xe^{-x^2}. & 55. y' &= e^{-x^2}. & 56. y' &= \frac{1}{1+x^2}. \\
 57. y' &= -\frac{1}{x}. & 58. y' &= -\frac{1}{x^2}. & 59. y' &= \frac{1}{2\sqrt{x-1}}. \\
 60. y' &= \frac{1}{2\sqrt{|x|}}. & 61. y' &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.
 \end{aligned}$$

В задачах 62—64 составить дифференциальное уравнение заданного семейства кривых. Какое общее свойство кривых этого семейства выражает полученное дифференциальное уравнение? Совпадает ли семейство интегральных кривых с заданным семейством кривых?

$$62. y = \frac{1}{3}x^3 + C. \quad 63. y = \sqrt{1-x^2} + C. \quad 64. y = \ln x + C.$$

65. Найти кривую, для которой сумма длин отрезков касательной и подкасательной пропорциональна произведению координат точки касания. (Указание. Воспользоваться формулами длин отрезков касательной TM и подкасательной TP (рис. 20): $TM = \left| \frac{y}{y'} \sqrt{1+y'^2} \right|$,

$TP = \frac{y}{y'}$, TP — отрезок, направленный от T к P .)

66. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox обратно пропорционален абсциссе точки касания.

67. Найти зависимость пути s от времени t при равномерном прямолинейном движении со скоростью v_0 , если $s=s_0$ при $t=t_0$. (Указание. Составив дифференциальное уравнение движения, воспользоваться общим решением в форме Коши.)

68. Материальная точка M массой m находится на абсолютно твердой и несгибаемой нити AB , вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω . Найти уравнение кривой AB , если точка M находится в равновесии в произвольном положении на этой кривой. (Указание. Пусть Oy — ось вращения. Для сохранения равновесия точки $M(x, y)$ необходимо и достаточно, чтобы направление равнодействующей сил, действующих на точку (силы тяжести mg и центробежной силы $m\omega^2 x$), совпадало с направлением нормали к кривой в точке M .)

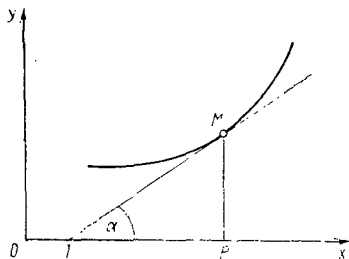


Рис. 20

3. УРАВНЕНИЕ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЕ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Общий интеграл. Для уравнения, не содержащего независимой переменной,

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \quad (1)$$

перевернутым уравнением будет

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}. \quad (1')$$

Уравнение (1') не содержит искомой функции x , и к нему применимо все сказанное в § 2 относительно уравнений такого типа.

Предположим, что $f(y)$ непрерывна в интервале (c, d) и не обращается в нуль в этом интервале. Тогда правая часть уравнения (1') будет непрерывной функцией от независимой переменной y в интервале (c, d) , вследствие чего (см. § 2)

$$x = \int \frac{1}{f(y)} dy + C \quad (2)$$

является общим решением уравнения (1') в области

$$c < y < d, |x| < +\infty \quad (3)$$

и, следовательно, общим интегралом уравнения (1).

Вся полоса (3) заполнена непересекающимися интегральными кривыми — графиками частных решений уравнения (1). Из общего решения (2) ясно, что все интегральные кривые уравнения (1), входящие в общий интеграл, получаются из какой-либо одной сдвигом вдоль оси Ox .

Задача Коши с начальными данными x_0, y_0 из полосы (3) имеет единственное решение, причем это решение частное.

Общий интеграл (2) можно переписать в форме Коши:

$$x = \int_{y_0}^y \frac{1}{f(y)} dy + x_0,$$

где x_0 играет роль произвольной постоянной; y_0 — фиксированное число, заключенное между числами c и d .

Особые решения. Предположим, что правая часть уравнения (1) обращается в нуль в некоторой точке $y=\eta$ из интервала (c, d) . Тогда $y=\eta$ будет решением уравнения (1), так как, подставляя $y=\eta$ в это уравнение, мы получим тождество $0 \equiv 0$. Это решение может оказаться особым.

Решение $y=\eta$ является либо огибающей, либо асимптотой семейства интегральных кривых, образующих общий интеграл. В первом случае решение $y=\eta$ будет особым, во втором — частным.

Непосредственное интегрирование уравнения (1). Общий интег-

рал и особые решения уравнения (1) можно найти, и не обращаясь к перевернутому уравнению. Для этого, умножив обе части уравнения (1) на dx , перепишем его в виде

$$dy = f(y) dx. \quad (4)$$

Разделив обе части этого уравнения на $f(y)$, получим

$$\frac{dy}{f(y)} = dx \quad (f(y) \neq 0?). \quad (5)$$

В скобках указано то уравнение, которое следует рассмотреть после интегрирования уравнения (5), ибо при делении обеих частей уравнения (4) на $f(y)$ мы могли потерять те его решения, которые обращают делитель $f(y)$ в нуль. (Уравнение (1) заведомо не имеет особых решений, если функция $f(y)$ непрерывно дифференцируема, поэтому, например, уравнение $y' = P(y)$ с полиномиальной правой частью особых решений не имеет.)

Интегрируя уравнение (5), имеем $\int \frac{dy}{f(y)} = x + C$. Полученное соотношение и представляет собой общий интеграл уравнения (1).

Рассмотрим теперь уравнение $f(y) = 0$. Если оно имеет вещественные решения вида $y = \eta$, то последние могут оказаться особыми. Во всяком случае, других особых решений у уравнения (1) быть не может.

Заметим, что задача Коши

$$y' = f(y), \quad y(x_0) = y_0$$

равносильна следующему интегральному уравнению:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(y) dx$$

(почему?). Здесь неизвестная функция y входит под знак интеграла.

Поле направлений. В точках прямой $y = b$ ($c < b < d$) направление поля, определяемого уравнением (1), одно и то же: $\operatorname{tg} \alpha = f(b)$, поэтому каждая такая прямая является *изоклиной*. Отсюда видим, что если $f(y)$ непрерывна в интервале (c, d) и не обращается в нуль в этом интервале, то все интегральные кривые получаются из какой-либо одной сдвигом вдоль оси Ox .

Если уравнение $f(y) = 0$ имеет вещественные решения $y = \eta$, то прямые $y = \eta$, будучи интегральными кривыми, разбивают плоскость (x, y) на полосы, в каждой из которых интегральные кривые имеют один и тот же характер поведения в отношении возрастания и убывания, причем интегральная кривая не может переходить из одной полосы в другую, если все решения $y = \eta$ частные.

Если же уравнение $f(y) = 0$ не имеет вещественных корней, то интегральная кривая, проходящая через любую точку плоскости, возрастает при $f(y) > 0$ и убывает при $f(y) < 0$.

Уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$. Это уравнение приводится к уравнению, не содержащему независимой переменной, с помощью подстановки $z = ax + by$ ($b \neq 0$), где z — новая неизвестная функция. Действительно, так как $z' = a + by'$, то $z' = a + bf(z)$. Это уравнение вида (1).

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2. \quad (6)$$

Правая часть его определена и непрерывна при всех значениях y и не обращается в нуль. Так как она положительна, то все интегральные кривые возрастают во всей области определения. Перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + y^2}$$

имеет общее решение

$$x = \operatorname{arctg} y + C \quad (7)$$

в области $|y| < +\infty$, $|x| < +\infty$.

Следовательно, формула (7) дает общий интеграл уравнения (6). Общим решением уравнения (6) будет

$$y = \operatorname{tg}(x + C_1) \quad (C_1 = -C, -\pi/2 - C_1 < x < \pi/2 - C_1).$$

Особых решений нет.

Мы приходим к тем же результатам, непосредственно интегрируя уравнение (6). Действительно, умножив обе части уравнения (6) на dx и разделив на $1 + y^2$, получим

$$\frac{dy}{1 + y^2} = dx. \quad (8)$$

При этом мы не теряем решений уравнения (6), ибо делитель $1 + y^2$ не обращается в нуль ни при каком вещественном значении y . Интегрируя уравнение (8), находим

$$\operatorname{arctg} y = x + C. \quad (9)$$

Это и есть общий интеграл уравнения (6). Общим интегралом в форме Коши будет

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{1 + y^2} = x - x_0 \text{ или } \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} y_0 = x - x_0. \quad (10)$$

Особых решений нет (почему?).

Найдем решение с начальным условием $y=0$ при $x=0$. Полагая в формуле (9) $x=0$, $y=0$, имеем $C=0$, откуда искомое решение

$$\operatorname{arctg} y = x \text{ или } y = \operatorname{tg} x \quad (-\pi/2 < x < \pi/2). \quad (11)$$

К этому же решению мы приходим, воспользовавшись формулой общего интеграла в форме Коши. Действительно, полагая в формуле (10) $x_0=0$, $y_0=0$, получаем решение (11). Прямые $x = \pm \pi/2$ являются асимптотами этого решения (рис. 21).

2. В уравнении

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \quad (12)$$

правая часть определена и непрерывна при всех значениях y , но обращается в нуль при $y = \pm 1$. Будем интегрировать уравнение (12) непосредственно:

$$\frac{dy}{1-y^2} = dx \quad (1-y^2 \neq 0),$$

поэтому

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right| = x + C \quad (13)$$

есть общий интеграл уравнения (12). Решая уравнение $1-y^2=0$, находим $y = \pm 1$. Прямые $y = \pm 1$ являются частными решениями. Интегральные кривые, лежащие внутри полосы $|y| < 1$, возрастают, лежащие вне — убывают.

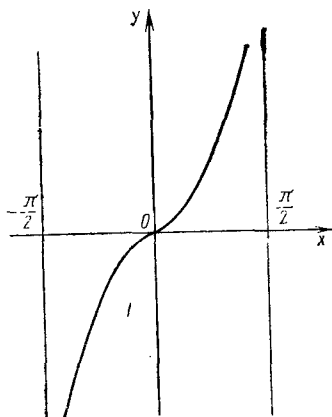


Рис. 21

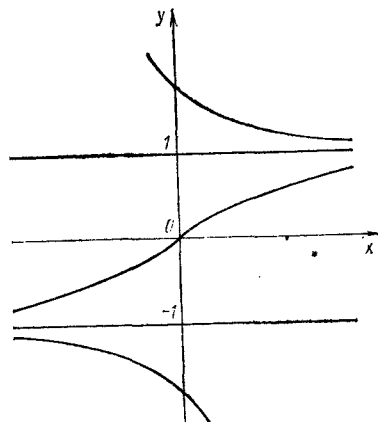


Рис. 22

Решения $y = \pm 1$ являются асимптотами интегральных кривых (13) (рис. 22).
3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}. \quad (14)$$

Здесь правая часть определена и непрерывна на отрезке $[-1, +1]$, причем на концах этого отрезка она обращается в нуль.

Интегрируя уравнение (14), получаем

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \quad (\sqrt{1-y^2} \neq 0),$$

следовательно, общим интегралом уравнения (14) будет $\arcsin y = x + C$, откуда

$$y = \sin(x + C) \quad (-\pi/2 - C < x < \pi/2 - C). \quad (15)$$

Из уравнения $\sqrt{1-y^2} = 0$ находим прямые $y = \pm 1$. Эти прямые являются особыми решениями, так как представляют собой огибающие семейства интегральных кривых, входящих в общее решение (15) (рис. 23).

4. Изучить поле направлений, определяемое дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad (16)$$

проинтегрировать его и построить семейство интегральных кривых (ср. пример 9 на с. 22).

Прямые вида $y=b$ — изоклины (рис. 24). Изоклины $y=0$ является интегральной кривой.

В верхней полуплоскости интегральные кривые возрастают, в нижней — убывают. Линий экстремумов нет.

Исследуем направление вогнутости интегральных кривых. Дифференцируя обе части уравнения (16), получаем $y''=y'$ или, принимая во внимание уравнение (16), $y''=y$. Отсюда ясно, что в верхней полуплоскости интегральные кривые вогнуты вверх, а в нижней — вниз. Линий точек перегиба нет.

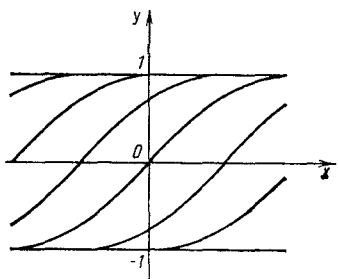


Рис. 23

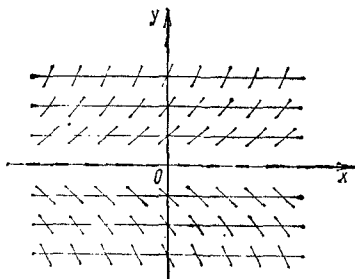


Рис. 24

Интегрируем уравнение (16):

$$\frac{dy}{y} = dx \quad (y \neq 0?),$$

$$\ln |y| = x + \ln |C|, \quad |y| = |C|e^x, \quad y = \pm Ce^x,$$

откуда получаем общее решение

$$y = C_1 e^x \quad (C_1 = \pm C).$$

Из последней формулы видно, что все отмеченные выше свойства интегральных кривых имеют место и интегральные кривые не могут пересекать ось Ox . Сама ось Ox является решением уравнения (16), и притом частным (почему?). Она представляет собой горизонтальную асимптоту всех других интегральных кривых уравнения (16) (рис. 25).

5. Составить дифференциальное уравнение семейства показательных функций

$$y = Ce^{kx} \quad (C \neq 0), \quad (17)$$

где k — заданное число; C — параметр семейства.

Дифференцируем обе части равенства (17) по x : $y' = kCe^{kx}$. Заменяя Ce^{kx} на y , получаем $y' = ky$. Это и есть искомое дифференциальное уравнение. Его решениями будут все показательные функции (17) и функция $y=0$, содержащаяся в формуле (17) при $C=0$.

Общее свойство всех этих решений, а следовательно, и общее дифференциальное свойство всех показательных функций (17) состоит в том, что скорость изменения каждой функции пропорциональна значению самой функции. Именно этим объясняется тот факт, что законы многих процессов выражаются в виде показательной функции. Таков, например, закон распада радия, рассматриваемый ниже, в примере 8.

6. Составить дифференциальное уравнение семейства полупарабол

$$y = (x + C)^2, \quad x \geq -C. \quad (18)$$

Дифференцируя обе части уравнения (18) по x , получаем

$$y' = 2(x + C). \quad (19)$$

Исключим C из уравнений (18) и (19). Из уравнения (18) находим $x+C = \sqrt{y}$ (радикал берем с положительным знаком, ибо, согласно условию, $x+C \geq 0$). Под-

ставляя значение $x+C$ в равенство (19), получаем дифференциальное уравнение $y' = 2\sqrt{y}$.

Общее свойство всех интегральных кривых, выражаемое этим уравнением, а следовательно, и общее свойство всех полупарабол (18) (см. рис. 7) состоит в том, что касательная к ним образует с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен удвоенному корню из ординаты точки касания (при этом сам угол для всех кривых (18) острый). Интегральными кривыми этого уравнения будут полупараболы (18) и их огибающая $y=0$ (особое решение).

7. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox равен квадрату ординаты точки касания. Выделить кривую, проходящую через точку $M(0, 1)$.

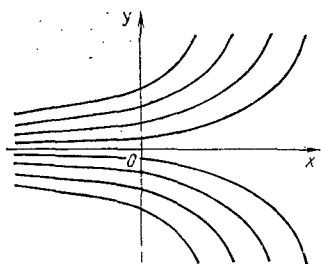


Рис. 25

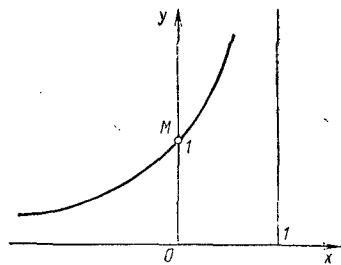


Рис. 26

Дифференциальным уравнением задачи будет

$$y' = y^2. \quad (20)$$

Интегрируем его:

$$\frac{dy}{y^2} = dx \quad (y \neq 0), \quad -\frac{1}{y} = x + C,$$

следовательно, общее решение уравнения (20) имеет вид

$$y = -\frac{1}{x + C}. \quad (21)$$

Оно представляет собой (при $C \neq \infty$) семейство равнобочных гипербол, асимптотами которых служат ось Ox и прямые $x = -C$; $y = 0$ (ось Ox) — частное решение ($C = \infty$).

Заменяя в общем решении (21) x и y координатами точки M , находим $C = -1$. Поэтому решением задачи Коши $y' = y^2$, $y(0) = 1$ будет $y = 1/(1-x)$ ($-\infty < x < 1$). Оно представляет лишь ту ветвь равнобочной гиперболы

$$y = 1/(1-x) \quad (22)$$

с асимптотами $y=0$ и $x=1$ (рис. 26), которая лежит в верхней полуплоскости. Ветвь, лежащая в нижней полуплоскости, также является интегральной кривой уравнения (20) (почему?). Таким образом, гипербола (22) и будет искомой кривой.

8. (Задача о распаде радия [24]). Известно, что скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству. Найти закон распада радия, если известно его первоначальное количество и период T полураспада, т. е. время, в течение которого распадается половина первоначального количества радия. Какой процент радия окажется распавшимся через 100 лет, если $T=1600$ лет?

Обозначим через R количество радия в момент времени t , а через R_0 его первоначальное количество (в момент времени $t=0$). Тогда скорость распада равна dR/dt . Она отрицательна (ибо R есть убывающая функция от t). Согласно условию задачи,

$$\frac{dR}{dt} = -kR \quad (R > 0), \quad (23)$$

где k — некоторое положительное число.

Интегрируем уравнение (23):

$$\frac{dR}{R} = -kdt, \ln R = -kt + \ln |C_1|,$$

откуда

$$R = Ce^{-kt} \quad (C = |C_1|). \quad (24)$$

Найдем C и k . Для определения произвольной постоянной C воспользуемся начальным условием $R=R_0$ при $t=0$. Подставляя в формулу (24) $R=R_0$, $t=0$, получаем $R_0=C$. Следовательно,

$$R = R_0 e^{-kt}. \quad (25)$$

Для нахождения k воспользуемся указанным в задаче «промежуточным условием» $R = R_0/2$ при $t = T$. Полагая в формуле (25) $R = R_0/2$, $t = T$, получаем $R_0/2 = R_0 e^{-kT}$, откуда

$$e^{-kT} = \frac{1}{2}, \quad k = \frac{\ln(1/2)}{-T} = \frac{\ln 2}{T}.$$

Подставляя найденное значение k в формулу (25), получаем искомую зависимость R от t :

$$R = R_0 e^{-(\ln 2/T)t}$$

или $R = R_0 2^{-t/T}$. При $T = 1600$

$$R = R_0 e^{-0,00043t},$$

$$R(100) = R_0 e^{-0,043}, \quad R(100)/R_0 = e^{-0,043} = 0,958.$$

Следовательно, через 100 лет распадется 4,2% первоначального запаса радия.

9. (Задача о вытекании жидкости из сосуда.) Найти время T (с), за которое жидкость, заполняющая коническую воронку высотой H (см) с углом при вершине 2α , вытекает из нее через малое отверстие площадью S (см²), вырезанное в вершине конуса (рис. 27), если известно, что скорость v (см/с) вытекания жидкости выражается формулой $v = k\sqrt{2gh}$, где $k = \text{const}$ (для воды $k=0,6$), g (см/с²) — ускорение свободного падения, h (см) — высота столба жидкости над отверстием.

Подсчитаем объем жидкости ΔV , вытекшей через отверстие в дне воронки за промежуток времени Δt . Он с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости относительно Δt равен объему цилиндра с площадью основания S и высотой $v\Delta t$, т. е.

$$\Delta V = Sk\sqrt{2gh} \Delta t + o(\Delta t),$$

где $o(\Delta t)$ — бесконечно малая функция от t при $\Delta t \rightarrow 0$ более высокого порядка малости, чем Δt .

За промежуток времени Δt уровень жидкости в воронке понизится на Δh . Вычислим объем слоя жидкости ΔV_1 , заключенного между уровнями h и $h+\Delta h$ ($\Delta h < 0$). Этот слой представляет собой усеченный конус. Заменяя последний цилиндром с той же высотой Δh и основанием, равным верхнему основанию конуса, получаем

$$\Delta V = \pi h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \Delta h + o(\Delta t)$$

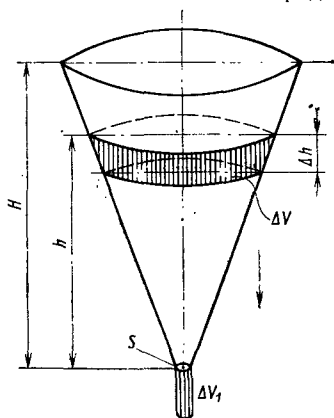


Рис. 27

Следовательно,

$$\pi h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \Delta h = -Sk \sqrt{2gh} \Delta t + o(\Delta t),$$

откуда

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\mu h^{-3/2} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \quad \mu = \frac{Sk \sqrt{2g}}{\pi \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, имеем

$$\frac{dh}{dt} = -\mu h^{-3/2}. \quad (26)$$

Это и есть дифференциальное уравнение нашей задачи. Требуется найти его решение, удовлетворяющее начальному условию

$$h = H \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (27)$$

и время $t = T$, при котором $h = 0$.

Интегрируя уравнение (26), получаем $\frac{2}{5} h^{5/2} = -\mu t + C$. Используя начальное условие (27), находим $C = \frac{2}{5} H^{5/2}$. Следовательно,

$$\frac{2}{5} h^{5/2} = -\mu t + \frac{2}{5} H^{5/2}. \quad (28)$$

Полагая в уравнении (28) $t = T$, $h = 0$, получаем

$$0 = -\mu T + \frac{2}{5} H^{5/2},$$

откуда

$$T = \frac{2}{5\mu} H^{5/2}.$$

10. Найти решение интегрального уравнения

$$y = 2 + \int_2^x \frac{1}{y} dx. \quad (29)$$

Приведем это уравнение к соответствующей ему задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Дифференцируя обе части уравнения (29) по x , получаем

$$y' = 1/y. \quad (30)$$

Нужно найти решение этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$y = 2 \quad \text{при} \quad x = 2 \quad (31)$$

(ибо, полагая в уравнении (29) $x=2$, получаем $y=2$). Интегрируем уравнение (30):

$$y dy = dx, \quad y^2/2 = x + C.$$

Полагая $x=2$, $y=2$, находим, что $C=0$. Искомым решением задачи Коши (30), (31), а следовательно, и данного интегрального уравнения (29) будет

$$y = \sqrt{2x}.$$

11. Рассмотрим уравнение

$$y' = \cos(x - y). \quad (32)$$

Положим $z = x - y$. Тогда $z' = 1 - y'$, $z = 1 - \cos z$. Отсюда

$$\frac{dz}{1 - \cos z} = dx \quad (1 - \cos z = 0?), \quad \int \frac{dz}{1 - \cos z} = x + C,$$

$$\int \frac{dz}{2 \sin^2(z/2)} = x + C, \quad -\operatorname{ctg} \frac{z}{2} = x + C.$$

Следовательно, общим интегралом уравнения (32) будет

$$x + \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = C_1 \quad (C_1 = -C).$$

Особых решений нет (почему?).

12. Проинтегрировать уравнение

$$y' = \sqrt{3x + 2y} - 3/2. \quad (33)$$

Положив $3x + 2y = z$, придем к уравнению $z' = 2\sqrt{z}$. Оно имеет общее решение $z = (x + C)^2$, $x > -C$, и особое решение $z = 0$. Поэтому общим и особым решениями данного уравнения (33) будут соответственно:

$$y = \frac{1}{2}(x + C)^2 - \frac{3}{2}x, \quad x > -C; \quad y = -\frac{3}{2}x.$$

(Сделайте рисунок.)

В задачах 69—96 проинтегрировать уравнение.

$$69. y' = e^y. \quad 70. y' = 2^{-y}. \quad 71. y' = -y^2(1 + y^2)^2.$$

$$72. y' = y + 1. \quad 73. y' = \cos^2 y. \quad 74. y' = \sin y.$$

$$75. y' = \cos y. \quad 76. y' = ky^n. \quad 77. y' = y^3 + 1.$$

$$78. y' = y^2 + a. \quad 79. y' = 1 + 1/y^2. \quad 80. y' = 1 + 1/y.$$

$$81. y' = \operatorname{ctg} y. \quad 82. y' = y \ln y. \quad 83. y' = \ln y.$$

$$84. y' = y \sqrt{y}. \quad 85. y' = 2 \sqrt{|y|}. \quad 86. y' = x + y + 1.$$

$$87. y' = (x + y)^2. \quad 88. y' = (4x + y - 1)^2.$$

$$89. y' = e^{x+y} - 1. \quad 90. y' = \frac{1}{x + y - 1}.$$

$$91. y' = -y^2 - 2xy - x^2. \text{ Найти асимптоты интегральных кривых.}$$

$$92. y' = \sqrt{y-x}. \quad 93. y' = \sqrt{y-x} + 1. \text{ (Сделать рисунок.)}$$

$$94. y' = \sqrt{x^2 - y} + 2x. \text{ (Указание. Сделать подстановку } x^2 - y = z.)$$

$$95. (y-x) \sqrt{1+x^2} y' = (1+y^2)^{3/2}. \text{ (Указание. Сделать подстановку } x = \operatorname{tg} u, y = \operatorname{tg} v.)$$

$$96. (qx - py) dx + (px + qy) dy = 0. \text{ (Сделать рисунок.) (Указание. Перейти к полярным координатам } x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi.)$$

В задачах 97—104 проинтегрировать уравнение и выделить интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M(x_0, y_0)$, выяснив предварительно вопрос о существовании и единственности ее, о направлении касательной и направлении вогнутости интегральной кривой в точке M ; сделать два рисунка (схематический предварительный рисунок и график найденного решения).

97. $y' = y; M(0, 1).$

98. $y' = -y; M(0, 1).$

99. $y' = -y^2; M(0, 0), M(1, 1).$

100. $y' = y - 1; M(1, 1).$

101. $y' = 1/y; M(0, 0).$

102. $y' = 2\sqrt{y}; M(-1, 1), M(0, 0).$

103. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}; M(0, 1), M(0, 0).$

104. $y' = \sqrt{4y^2 - 1}; M(0, 1/2).$ (Указание. При вычислении ин-

теграла $\int \frac{dy}{\sqrt{4y^2 - 1}}$ воспользоваться подстановкой $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} t.$)

В задачах 105—112 найти решения вида $y = b.$

105. $y' = y^2 - 1.$

106. $y' = y^2 - 5y + 6.$

107. $y' = \sin y.$

108. $y' = y^2 + 1.$

109. $y' = y^{2/3}.$

110. $y' = y \ln y.$

111. $y' = \frac{1}{\operatorname{tg} y}.$

112. $y' = 2\sqrt{y} + 1.$

В задачах 113—116 найти вертикальную и горизонтальную асимптоты интегральной кривой, проходящей через заданную точку $M(x_0, y_0)$; сделать рисунок.

113. $y' = 1 + y^2; M(0, 0).$

114. $y' = -y^2; M(0, 1).$

115. $y' = y; M(0, 1).$

116. $y' = y^3 - 1; M(0, 1).$

В задачах 117—125 определить область задания уравнения, область существования решения задачи Коши, область существования и единственности, указать особые линии; изучить поле направлений, определяемое этим дифференциальным уравнением (найти изоклины, построить изоклины $y' = 0$, $y' = \pm 1$, $y' = \infty$, определить направление поля в точках, лежащих на осях координат, указать области возрастания и убывания решений, найти линии экстремумов, установить направление вогнутости и найти линии точек перегиба, сделать рисунок); сделать схематический набросок семейства интегральных кривых; проинтегрировать уравнение, найдя все решения; изучить поведение интегральных кривых в окрестности особых линий, на границе области задания уравнения и на бесконечности по аналитическому виду семейства интегральных кривых; сделать рисунок.

117. $y' = -y.$

118. $y' = y^2.$

119. $y' = 1 + y^2.$

120. $y' = 1/y.$

121. $y' = 2\sqrt{y}.$

122. $y' = 2\sqrt{|y|}.$

123. $y' = 3y^{2/3}.$

124. $y' = e^y.$

125. $y' = -y^2 - 2xy - x^2.$

В задачах 126, 127 составить дифференциальное уравнение заданного семейства кривых; выяснить, какое общее свойство кривых этого семейства оно выражает.

126. $y = -1/(x + C).$

127. $y^2 = 2p(x + C).$

В задачах 128—131 найти решения интегрального уравнения.

128. $y = \int_1^x e^{-y} dx \quad (x > 0).$

129. $y = \int_0^x y dx + 1.$

$$130. y = 2 \int_0^x \sqrt{y} dx.$$

$$131. \sqrt{y} = \int_0^x y dx.$$

132. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox прямо пропорционален ординате точки касания.

133. (Задача об охлаждении тела в воздухе.) Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Найти закон охлаждения тела, если температура воздуха 20°C и тело в течение 20 мин охлаждается от 100 до 60°C . Через сколько минут его температура понизится до 30°C ?

134. Допуская, что в вертикальном воздушном столбе давление на каждом уровне обусловлено давлением вышележащих слоев, найти зависимость давления p от высоты h , если известно, что на уровне моря ($h=0$) это давление равно $9,81 \cdot 10^4$ Па, а на высоте 500 м — $9,016 \cdot 10^4$ Па. (У к а з а н и е. Определить, насколько изменится величина давления воздуха при переходе от слоя на высоте h к слою на высоте $h+dh$, воспользовавшись законом Бойля—Мариотта, т. е. считать, что плотность воздуха ρ пропорциональна давлению p .)

135. Пользуясь полярными координатами θ и r , найти кривые $r=r(\theta)$, пересекающие все радиусы-векторы под углом ω , где $\text{tg } \omega = a$. (У к а з а н и е. Воспользоваться формулой $\text{tg } \omega = r/r'_\theta$. Так как $\omega = a - \theta$ (рис. 28), то

$$\text{tg } \omega = \frac{\text{tg } a - \text{tg } \theta}{1 + \text{tg } a \text{tg } \theta}.$$

Но

$$\text{tg } a = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{(r \sin \theta)'_\theta}{(r \cos \theta)'_\theta} = \frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{r' \cos \theta - r \sin \theta}, \quad \text{tg } \theta = \frac{y}{x},$$

поэтому $\text{tg } \omega = r/r'_\theta$.)

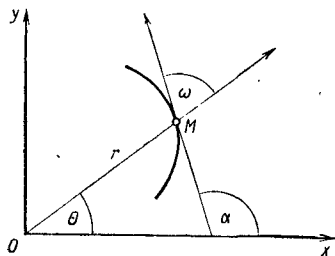


Рис. 28

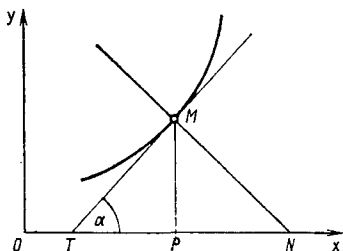


Рис. 29

136. Найти кривые, у которых поднормаль PN (рис. 29) всюду равна p . (У к а з а н и е. Воспользоваться формулой длины поднормали $PN = yy'$, PN — отрезок, направленный от P к N .)

137. Найти кривые, для которых сумма длин отрезков нормали MN и поднормали PN (см. рис. 29) есть величина постоянная, равная a . (Указание. Воспользоваться формулой длины отрезка нормали $MN = |y\sqrt{1+y'^2}|$.)

4. УРАВНЕНИЕ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнение с разделенными переменными. Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0,$$

где коэффициент при dx зависит только от x , а коэффициент при dy — только от y , то говорят, что в нем *переменные разделены*. Общим интегралом такого уравнения в предположении, что обе функции X и Y непрерывны, будет

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C \quad (1)$$

или

$$\int_{x_0}^x X(x)dx + \int_{y_0}^y Y(y)dy = C. \quad (2)$$

Особых решений нет.

Если $X(x_0)$ и $Y(y_0)$ не равны нулю одновременно, то решение с начальными данными x_0, y_0 можно найти обычным способом по общему интегралу (1) или, еще проще, по общему интегралу (2), положив в нем $C=0$:

$$\int_{x_0}^x X(x)dx + \int_{y_0}^y Y(y)dy = 0. \quad (3)$$

Если же $X(x_0)=Y(y_0)=0$, то решение с начальными данными x_0, y_0 может не существовать или быть не единственным.

Уравнение с разделяющимися переменными. Дифференциальное уравнение

$$m(x)n(y)dx + m_1(x)n_1(y)dy = 0 \quad (4)$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Умножая обе части уравнения (4) на $\frac{1}{m_1(x)n(y)}$, получаем уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = 0 \quad (m_1(x) \neq 0, n(y) \neq 0). \quad (5)$$

Общим интегралом этого уравнения, а следовательно, и уравнения (4) будет в предположении, что все функции $m(x), n(y), m_1(x)$ и $n_1(y)$ непрерывны,

или

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)} dx + \int \frac{n_1(y)}{n(y)} dy = C,$$

$$\int_{x_0}^x \frac{m(x)}{m_1(x)} dx + \int_{y_0}^y \frac{n_1(y)}{n(y)} dy = C,$$

где $m_1(x_0) \neq 0$, $n(y_0) \neq 0$.

Рассмотрим уравнения $m_1(x)=0$, $n(y)=0$, отмеченные в формуле (5) в скобках. Если они имеют вещественные решения вида $x=a$, $y=b$, то $x=a$ ($y \neq b$), $y=b$ ($x \neq a$) будут решениями уравнения (4). Эти решения, и только они, могут оказаться особыми.

Решение с начальными данными x_0 , y_0 при условии, что $m_1(x_0) \neq 0$, $n(y_0) \neq 0$, а $m(x_0)$, $n_1(y_0)$ не равны одновременно нулю, дается формулой

$$\int_{x_0}^x \frac{m(x)}{m_1(x)} dx + \int_{y_0}^y \frac{n_1(y)}{n(y)} dy = 0.$$

Если $m(x_0)=n_1(y_0)=0$, то не гарантируется ни существование, ни единственность решения.

В случае, когда начальная точка (x_0, y_0) лежит на одном из отмеченных выше решений вида $x=a$ ($y \neq b$), $y=b$ ($x \neq a$), причем это решение частное, других решений, проходящих через точку (x_0, y_0) , нет. Если же это решение особое, то оно касается в точке (x_0, y_0) некоторой интегральной кривой, содержащейся в общем интеграле при соответствующем значении C .

Наконец, если $x_0=a$, $y_0=b$, то поле в начальной точке (a, b) не определено. К этой точке примыкают решения $x=a$ ($y \neq b$), $y=b$ ($x \neq a$).

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \quad (6)$$

есть уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx \quad (f_2(y) \neq 0?).$$

Общим интегралом будет

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C.$$

Если уравнение $f_2(y)=0$ имеет вещественные решения вида $y=b$, то прямые $y=b$ будут решениями уравнения (6). Эти решения могут оказаться особыми. Других особых решений быть не может.

Примеры. 1. Найти общий интеграл уравнения

$$x dx + (y + 1) dy = 0 \quad (7)$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точку $(0, 0)$.

Согласно уравнению (1), общим интегралом уравнения (7) будет

$$\int x dx + \int (y + 1) dy = C \text{ или } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y = C.$$

Полагая в нем $x=0$, $y=0$, находим, что $C=0$. Искомой интегральной кривой будет $x^2 + y^2 + 2y = 0$.

Эту же интегральную кривую мы можем получить, не находя общего интеграла, а пользуясь формулой (3):

$$\int_0^x x dx + \int_0^y (y + 1) dy = 0, \quad x^2 + y^2 + 2y = 0.$$

2. Рассмотрим уравнение

$$x dx + y dy = 0. \quad (8)$$

В точке $x=0$, $y=0$ поле не определено. Общим интегралом уравнения (8) будет

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

К началу координат не примыкает ни одна интегральная кривая.

3. Пусть дано уравнение

$$x dy + y dx = 0. \quad (9)$$

В начале координат поле не определено.

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \quad (y \neq 0, x \neq 0), \quad \ln |y| + \ln |x| = \ln |C|,$$

$$|xy| = |C|, \quad xy = \pm C, \quad xy = C_1 \quad (C_1 = \pm C).$$

Решения $x=0$ ($y \neq 0$), $y=0$ ($x \neq 0$) — частные. (Убеждаться в этом нет необходимости, ибо уравнение (9) заведомо не имеет особых решений, так как коэффициенты при dx и dy суть полиномы.) К началу координат примыкают только эти решения.

4. Рассмотрим уравнение

$$x(1 + y^2) dx + y(1 + x^2) dy = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{x}{1 + x^2} dx + \frac{y}{1 + y^2} dy = 0, \quad (1 + x^2)(1 + y^2) = C^2.$$

К началу координат не примыкает ни одна интегральная кривая.

5. Пусть дано уравнение

$$x^2(y + 1) dx + (x^3 - 1)(y - 1) dy = 0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{x^2}{x^3 - 1} dx + \frac{y - 1}{y + 1} dy = 0 \quad (x^3 - 1 \neq 0, y + 1 \neq 0).$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{1}{3} \ln |x^3 - 1| + y - 2 \ln |y + 1| = C.$$

Далее из уравнений $x^2 - 1 = 0$ и $y + 1 = 0$ находим $x = 1$, $y = -1$. Эти решения — частные.

6. Проинтегрировать уравнение

$$2y \sqrt{by - y^2} dx - (b^2 + x^2) dy = 0 \quad (10)$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точку $(0, b)$.

Разделяем в уравнении (10) переменные и интегрируем:

$$\frac{2dx}{b^2 + x^2} - \frac{dy}{y \sqrt{by - y^2}} = 0 \quad (y \sqrt{by - y^2} = 0?),$$

$$\arctg \frac{x}{b} + \sqrt{\frac{b-y}{y}} = C. \quad (11)$$

Далее из уравнения $y \sqrt{by - y^2} = 0$ находим решения уравнения (10): $y = 0$, $y = b$. Первое из этих решений — частное, второе — особое.

Прежде чем выделить интегральную кривую, проходящую через заданную точку $(0, b)$, заметим, что в этой точке поле определено, но она лежит на особом решении $y = b$, поэтому в ней нарушается единственность решения.

Полагая в общем интеграле (11) $x = 0$, $y = b$, находим $C = 0$, так что через заданную точку $(0, b)$ проходит интегральная кривая $\arctg \frac{x}{b} + \sqrt{\frac{b-y}{y}} = 0$ и, кроме того, $y = b$.

7. Рассмотрим уравнение

$$y' = -2xy.$$

Это уравнение вида (6). Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} = -2x dx \quad (y = 0?).$$

Отсюда

$$\ln |y| = -x^2 + \ln |C|, \quad |y| = |C| e^{-x^2}, \quad y = \pm C e^{-x^2}$$

или $y = C_1 e^{-x^2}$ ($C_1 = \pm C$).

Решение $y = 0$ — частное. (Сделать рисунок.)

8. Пусть дано уравнение

$$(xy - x) dx + (xy - x - y - 1) dy = 0.$$

Разложив коэффициенты при dx и dy на множители, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$x(y-1) dx + (x-1)(y+1) dy = 0.$$

Находим общий интеграл:

$$x + \ln |x-1| + y + 2 \ln |y-1| = C.$$

Особых решений нет.

В задачах 138—147 проинтегрировать уравнение.

138. $(x + 2x^3) dx + (y + 2y^3) dy = 0.$

139. $\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0.$

140. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$

141. $2x \sqrt{1-y^2} dx + y dy = 0.$

142. $y' = (y-1)(x^2+1).$

143. $y' = e^{x-y}.$

144. $y' = \sqrt{y}/\sqrt{x}.$

$$145. y' = \sqrt{y}/x.$$

$$146. (y^2 + xy^2) dx + (x^2 - yx^2) dy = 0.$$

$$147. (1 + y^2)(e^{2x} dx - e^y dy) - (1 + y) dy = 0.$$

В задачах 148—152 проинтегрировать уравнение и выделить интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M(x_0, y_0)$, выяснив предварительно вопрос о существовании и единственности этой интегральной кривой.

$$148. (1 - x) dy - y dx = 0; M(0, 1).$$

$$149. dx - \sqrt{1 - x^2} dy = 0; M(1, \pi/2).$$

$$150. x \sqrt{1 - y^2} dx + y \sqrt{1 - x^2} dy = 0; M(1, 0), M(0, 0).$$

$$151. x dy - y dx = 0; M(1, 1), M(1, 0), M(0, 1), M(0, 0).$$

$$152. y' = y \cos x; M(0, 1).$$

В задачах 153—161 определить область задания уравнения, область существования решения задачи Коши, область существования и единственности; указать особые точки и особые линии; изучить поле направлений, определяемое этим дифференциальным уравнением (найти изоклины, построить изоклины $y' = 0$, $y' = \pm 1$, $y' = \infty$, определить направления поля в точках, лежащих на осях координат, указать области возрастания и убывания решений, найти линии экстремумов, установить направление вогнутости и найти линии точек перегиба, сделать рисунок); сделать схематический набросок семейства интегральных кривых; проинтегрировать уравнение, найдя все решения; изучить поведение интегральных кривых в окрестности особых точек и особых линий, на границе области задания уравнения и на бесконечности по аналитическому виду семейства интегральных кривых; сделать рисунок.

$$153. y' = 2xy. \quad 154. y' = \frac{2xy}{1 - x^2}. \quad 155. y' = \frac{3}{2} \frac{x^2}{y}.$$

$$156. y' = y \cos x. \quad 157. y' = -y \sin x. \quad 158. y' = \sqrt{y}/x.$$

$$159. y' = y/\sqrt{x}. \quad 160. y' = \sqrt{y}/\sqrt{x}.$$

$$161. x(y^2 - 1) dx + y(x^2 - 1) dy = 0.$$

В задачах 162, 163 составить дифференциальное уравнение заданного семейства кривых.

$$162. \ln y = C \operatorname{tg}(x/2). \quad 163. (1 + x^2)(1 + y^2)' = Cy^2.$$

В задачах 164, 165 найти алгебраический общий интеграл уравнения, воспользовавшись следующей теоремой: если $\psi_1(x, y) = C_1$ есть общий интеграл уравнения $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$, то $\Phi(\psi_1) = C_2$, где Φ — любая непрерывно дифференцируемая функция, тоже является общим интегралом этого уравнения. (Выбрать функцию Φ .)

$$164. \sqrt{1 - y^2} dx + \sqrt{1 - x^2} dy = 0.$$

$$165. (1 + y^2) dx + (1 + x^2) dy = 0.$$

В задачах 166—169 найти по виду уравнения кривые, подозрительные на особое решение, и проверить, будут ли они особыми решениями.

$$166. y' = \sqrt{y}/\sqrt{x}.$$

$$167. y' = \sqrt{y - 1}/x.$$

$$168. y' = \sqrt{1 - y^2} / y + a. \quad 169. y' = xy^{2/3}.$$

В задачах 170—174 доказать по виду уравнения, что оно не имеет особых решений.

$$170. y' = (x^2 - x)(1 + y^3). \quad 171. y' = \sin x / (1 + x^2).$$

$$172. y' = e^y / x.$$

$$173. y' = x \sqrt{1 + y^2}.$$

$$174. (y + y^2 - x^2y - x^2y^2) dx + (x^3y - 8y - x^3 + 8) dy = 0.$$

В задачах 175, 176 найти по общему решению кривые, подозрительные на особое решение, и проверить, будут ли они особыми решениями.

$$175. y' = 2\sqrt{y}/x; \quad y = (\ln x + C)^2.$$

$$176. y' = 4x\sqrt{y-1}; \quad y = (x^2 + C)^2 + 1.$$

177. Найти кривые, у которых отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания. Выделить кривую, проходящую через точку $M(2, 3)$.

178. Найти кривые, у которых угол θ между полярной осью и радиусом-вектором точки касания равен углу ω между продолжением радиуса-вектора и касательной.

179. Материальная точка M массой m находится в состоянии равновесия в произвольном положении на абсолютно твердой и негибкой нити AB . Найти уравнение кривой AB , если на точку M действуют две силы: одна параллельна положительному направлению оси Ox и пропорциональна абсциссе точки, другая параллельна положительному направлению оси Oy и пропорциональна ординате точки. (У к а з а н и е. См. задачу 68.)

180. За какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметром 2 м, вытечет из нее через круглое отверстие диаметром 0,2 м, вырезанное в дне чаши, если скорость вытекания воды $v = 0,6\sqrt{2gh}$ (см/с), где h — высота столба воды над отверстием?

181. Найти алгебраический общий интеграл уравнения Эйлера

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0, \quad \text{где } X = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4; \quad Y = a_0y^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4.$$

5. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ И ПРОСТЕЙШЕЕ УРАВНЕНИЕ, ПРИВОДЯЩЕЕСЯ К ОДНОРОДНОМУ

Однородное уравнение. Уравнение

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0, \quad (1)$$

в котором M и N — однородные функции одной и той же степени, т. е. обладают свойством

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y)$$

при всех t или хотя бы при $t > 0$ (положительно однородные), называется *однородным (положительно однородным)*.

Уравнение (1) всегда может быть приведено к виду

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2)$$

Отсюда видно, что поле направлений, определяемое однородным уравнением, не задано в начале координат, поэтому начало координат является особой точкой однородного уравнения.

Изоклинами однородного уравнения будут полупрямые $y=kx$ ($x \neq 0$), выходящие из начала координат и лежащие в области задания уравнения. Поэтому все интегральные кривые, перескающие такую полупрямую, образуют с ней (в точках пересечения) один и тот же угол δ (рис. 30).

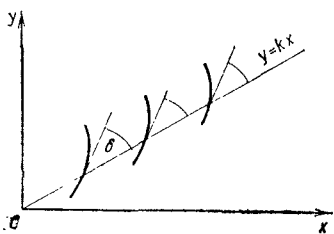


Рис. 30

Если k удовлетворяет условию $k = \varphi(k)$, то изоклина $y=kx$ ($x \neq 0$) будет интегральной кривой однородного уравнения (2).

Однородное (и положительно однородное) уравнение приводит к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены искомой функции y по формуле

$$y = zx, \quad (3)$$

где z — новая искомая функция. Выполнив подстановку (3) в уравнении (2), получим

$$xdz + (z - \varphi(z))dx = 0.$$

Предполагая, что $\varphi(z) \neq z$, и разделяя переменные, приходим к уравнению

$$\frac{dz}{z - \varphi(z)} + \frac{dx}{x} = 0 \quad (x \neq 0? \quad z - \varphi(z) \neq 0?).$$

Интегрируя его, находим

$$\int \frac{dz}{z - \varphi(z)} + \ln|x| = C$$

или

$$\psi(z) + \ln|x| = C \quad \left(\psi(z) \equiv \int \frac{dz}{z - \varphi(z)} \right),$$

откуда $\psi(y/x) + \ln|x| = C$. Это общий интеграл однородного уравнения (2).

Замечание. Если $\psi(z)$ окажется неэлементарной функцией, то общее решение однородного уравнения (2) может быть записано в параметрическом виде $x = C_1 e^{-\psi(z)}$, $y = C_1 z e^{-\psi(z)}$. (Здесь x и y выражены через параметр z .)

Особыми решениями однородного уравнения (2) могут быть полуси Oy ($x = 0$ ($y \neq 0$)) и полупрямые $y = z_i x$ ($x \neq 0$), где z_i — корни уравнения $z - \varphi(z) = 0$.

Если $\varphi(z) \equiv z$, то однородное уравнение (2) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (2')$$

и становится уравнением с разделяющимися переменными. Решениями этого уравнения являются полупрямые

$$\left. \begin{aligned} y &= Cx \quad (x \neq 0), \\ x &= 0 \quad (y \neq 0), \end{aligned} \right\}$$

примыкающие к началу координат, которое является особой точкой уравнения (2'). Особых решений уравнение (2') не имеет.

Для интегрирования однородного уравнения, заданного в виде (1), нет необходимости приводить его к виду (2). Выполняя в уравнении (1) подстановку (3), приходим к уравнению с разделяющимися переменными, интегрируя его и возвращаясь к искомой функции y , находим общий интеграл. Особыми решениями могут быть только полуси оси Oy и полупрямые $y = z_i x$ ($x \neq 0$), где $z = z_i$ — особые решения упомянутого выше уравнения с разделяющимися переменными. При этом однородное уравнение (1) заведомо не имеет особых решений, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются полиномами от x и y (почему?).

Иногда целесообразно вместо подстановки (3) использовать подстановку $x = zy$.

Простейшее уравнение, приводящееся к однородному. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f \left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c} \right). \quad (4)$$

Если

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a & b \end{array} \right| \neq 0, \quad (5)$$

то это уравнение с помощью подстановки $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, где ξ и η — новые переменные, а α и β — некоторые постоянные числа, определяемые из системы

$$\left. \begin{aligned} a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 &= 0, \\ a \alpha + b \beta + c &= 0, \end{aligned} \right\}$$

приводится к однородному уравнению

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f \left(\frac{a_1 \xi + b_1 \eta}{a \xi + b \eta} \right).$$

Если

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a & b \end{array} \right| = 0 \quad (b \neq 0),$$

то уравнение (4) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax + by) + c_1}{ax + by + c}\right) \equiv f_1(ax + by).$$

Полагая $z = ax + by$ (см. § 3), приходим к уравнению, не содержащему независимой переменной.

Примеры. 1. Найти общее решение и изучить поведение интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \quad (6)$$

в окрестности особой точки $x=0, y=0$.

В этом уравнении переменные непосредственно разделяются. Интегрируя, находим $y=Cx^2$ ($x \neq 0$).

Если принять во внимание перевернутое уравнение, то решениями уравнения (6) будут также и полуоси оси Oy : $x=0$ ($y \neq 0$).

Расположение интегральных кривых в окрестности особой точки указано на рис. 31. Вся окрестность этой особой точки заполнена пересекающимися интегральными кривыми, каждая из которых примыкает к особой точке с определенным направлением касательной, причем это направление, за исключением полуосей оси Oy , у всех интегральных кривых одно и то же. Особая точка с таким расположением интегральных кривых называется *обыкновенным узлом*.

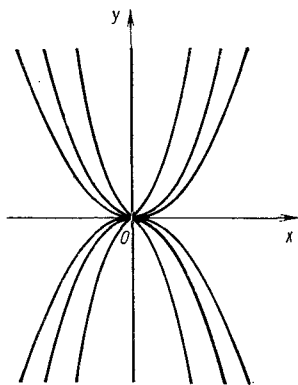


Рис. 31

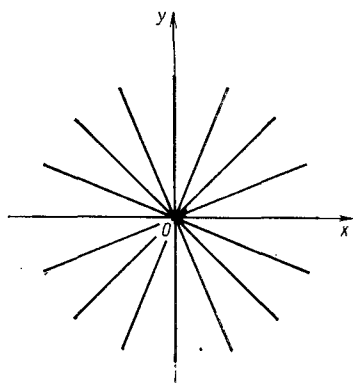


Рис. 32

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Его решениями будут полупрямые: $y=Cx$ ($x \neq 0$), $x=0$ ($y \neq 0$).

Расположение интегральных кривых в окрестности особой точки $x=0, y=0$ указано на рис. 32. Такая особая точка называется *седловидной (особой) точкой*. Здесь, как и в случае обыкновенного узла, все интегральные кривые примыкают к особой точке, но каждая из них имеет свое направление.

3. Рассмотрим еще один вид узлов. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}. \quad (7)$$

Положим $y = zx$. Тогда $\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$. Подставляем эти значения y и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (7):

$$x \frac{dz}{dx} + z = \frac{x + zx}{x} \quad \text{или} \quad x \frac{dz}{dx} = 1,$$

откуда $z = \ln|x| + C$. Подставляя это значение z в формулу $y = zx$, получаем

$$y = x(\ln|x| + C) \quad (x \neq 0). \quad (8)$$

Все эти интегральные кривые, так же как и полуоси оси Oy , примыкают к особой точке $x = 0$, $y = 0$, ибо

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} x(\ln|x| + C) = 0,$$

но в отличие от обычного узла все они имеют одно и то же направление касательной в особой точке, а именно касаются оси Oy , так как $y' = \ln|x| + C + 1 \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow 0$. Такая особая точка называется *вырожденным узлом* (рис. 33).

Исследуем поле направлений, определяемое уравнением (7) (см. задачи 153—161).

Прежде всего отметим, что уравнение (7) и определяемое им поле направлений заданы всюду, кроме начала координат.

Через каждую точку плоскости (x, y) , кроме начала координат, проходит одна и только одна интегральная кривая (почему?).

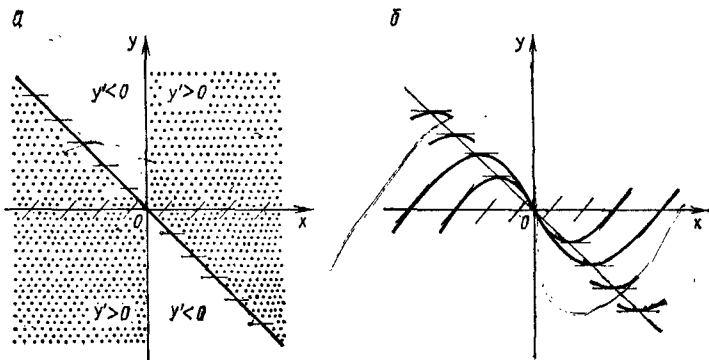


Рис. 33

Изоклинами являются все полупрямые, выходящие из начала координат. В частности, все интегральные кривые пересекают полуоси оси Ox под углом $\pi/4$ (см. рис. 33, а), а в точках полуосей оси Oy касательные к интегральным кривым параллельны оси Oy .

Найдем области возрастания и убывания решений. Это будут области, в которых производная y' соответственно положительна или отрицательна. Неравенство $(x+y)/x > 0$ выполняется в областях $x < 0$, $y < -x$; $x > 0$, $y > -x$ (на рис. 33, а они заштрихованы). В этих областях решения возрастают. В областях $x < 0$, $y > -x$; $x > 0$, $y < -x$ решения убывают.

Для нахождения линий экстремумов решений приравняем нулю правую часть уравнения (7). Получим полупрямые $y = -x$ ($x < 0$), $y = -x$ ($x > 0$). Рассмотрев области возрастания и убывания решений (рис. 33, а), увидим, что эти полупрямые являются линиями экстремумов, причем $y = -x$ ($x < 0$) — линия максимумов, а $y = -x$ ($x > 0$) — линия минимумов (см. рис. 33, б). Это следует также из изучения знака второй производной y'' , вычисленной исходя из уравнения (7), на

указанных полупрямых

$$y'' \Big|_{(7)} = \frac{(1 + y')x - (x + y)}{x^2} \Big|_{(7)} = \frac{1}{x}. \quad (7')$$

Направление вогнутости интегральных кривых определяется знаком второй производной, вычисленной исходя из дифференциального уравнения. Из формулы (7') следует, что слева от оси Oy ($x < 0$) интегральные кривые вогнуты вниз, а справа — вверх. Поэтому только ось Oy подозрительна на линию точек перегиба интегральных кривых. (Это следует также из того, что вторая производная y'' , вычисленная исходя из дифференциального уравнения (7), не обращается в нуль, но обращается в бесконечность на оси Oy .) Однако полуоси оси Oy не могут быть линиями точек перегиба интегральных кривых, так как сами являются интегральными кривыми и лежат в области единственности. Следовательно, линий точек перегиба интегральных кривых нет.

Выполненное исследование дает возможность сделать некоторые заключения о поведении интегральных кривых уравнения (7). Интегральная кривая (решение), начинающаяся в третьей четверти, возрастая, пересечет ось Ox под углом $\pi/4$, затем, продолжая возрастать, полупрямую $y = -x$ ($x < 0$), достигнет в точке пересечения максимума и далее будет убывать. Но так как решение не может пересечь ни верхнюю полуось оси Oy , ни полупрямую $y = -x$ ($x < 0$) (почему?), то оно, оставаясь во второй четверти, примыкает к особой точке $x = 0, y = 0$ — началу координат. Интегральные кривые справа от оси Oy ведут себя аналогично. Примыкая к особой точке, решение сначала убывает до пересечения с полупрямой $y = -x$ ($x > 0$). В точке пересечения с этой полупрямой оно имеет минимум, а затем возрастает.

Поведение интегральных кривых уравнения (7) изображено схематически на рис. 33, б.

Из общего решения (8) видно, как ведут себя интегральные кривые, входящие в эту формулу, при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$. Они определены при всех x , кроме $x = 0$, причем

$$y = x(\ln|x| + C) \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow +\infty,$$

$$y = x(\ln|x| + C) \rightarrow -\infty \text{ при } x \rightarrow -\infty.$$

Интегральные кривые (8) получаются из одной с помощью преобразования подобия с центром подобия в начале координат.

4. Для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

решениям будут

$$y = C/x \quad (x \neq 0), \quad x = 0 \quad (y \neq 0).$$

Здесь к особой точке $x = 0, y = 0$ примыкает только конечное число интегральных кривых, а именно только полуоси осей координат. Такая особая точка называется *седлом* (рис. 34).

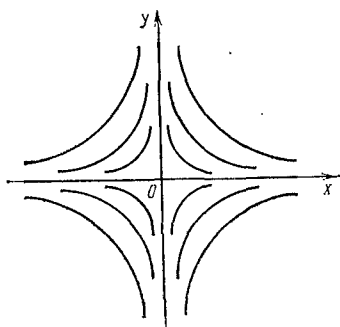


Рис. 34

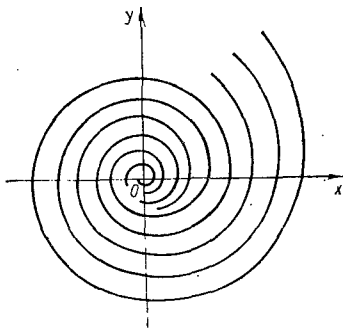


Рис. 35

Заметим, что четыре интегральные кривые $y=0$ ($x \neq 0$), $x=0$ ($y=0$) (полуоси осей координат) являются асимптотами семейства интегральных кривых. Они называются *сепаратрисами седла*.

5. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}. \quad (9)$$

Положим $y = zx$, тогда $\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$. Отсюда

$$x \frac{dz}{dx} + z = \frac{1+z}{1-z}, \quad \frac{1-z}{1+z^2} dz - \frac{dx}{x} = 0 \quad (x \neq 0?),$$

$$\operatorname{arctg} z - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) - \ln|x| = \ln|C_1|,$$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln|C_1|,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C e^{\operatorname{arctg}(y/x)} \quad \left(C = \frac{1}{|C_1|} \right).$$

Переходя к полярным координатам по формулам $x=r \cos \theta$, $y=r \sin \theta$, получаем общее решение уравнения (9) в виде

$$r = C e^{\theta}.$$

Это есть семейство логарифмических спиралей. Все они примыкают к особой точке $x=0$, $y=0$ (рис. 35), бесконечно нависая к ней, когда $\theta \rightarrow -\infty$. В подобных случаях особая точка называется *фокусом*.

Заметим, что тот же вид общего решения уравнения (9) можно получить быстрее, если сразу перейти в уравнении (9) к полярным координатам. В этом случае $dr/d\theta = r$, откуда $r = C e^{\theta}$.

6. Для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

общим интегралом будет

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Расположение интегральных кривых в окрестности особой точки $x=0$, $y=0$ показано на рис. 36. Ни одна из них не примыкает к особой точке. Окрестность особой точки целиком заполнена замкнутыми интегральными кривыми, которые содержат внутри себя эту точку. Такая особая точка называется *центром*.

7. Пронтегрировать уравнение

$$(x^2 + 2xy - y^2) dx + (y^2 + 2xy - x^2) dy = 0 \quad (10)$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точки: а) (2, 2); б) (1, -1); в) (0, 0).

Положим $y = zx$. Тогда $dy = x dz + z dx$ и

$$(x^2 + 2zx^2 - z^2x^2) dx + (z^2x^2 + 2xz^2 - x^2) (x dz + z dx) = 0.$$

Сократим на x^2 и соберем члены при dx и dz :

$$(z^3 + z^2 + z + 1) dx + (z^3 + 2z - 1) x dz = 0.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dx}{x} + \frac{z^3 + 2z - 1}{(z^2 + 1)(z + 1)} dz = 0 \quad (z + 1 \neq 0?).$$

Интегрируя, получаем

$$\ln |x| - \ln |z+1| + \ln (z^2+1) = \ln |C_1|$$

или

$$\frac{x(z^2+1)}{z+1} = C \quad (C = \pm |C_1|).$$

Заменяя здесь z на y/x , получим общий интеграл уравнения (10) в виде

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} = C.$$

Это семейство окружностей

$$x^2+y^2 = C(x+y) \quad (C \neq 0, C \neq \infty) \quad (11)$$

(из которых нужно исключить начало координат) и полупрямые

$$x+y=0 \quad (x \neq 0, C = \infty). \quad (12)$$

Записав семейство (11) в виде

$$\left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{2}, \quad (13)$$

заметим, что центры всех окружностей (13) лежат на прямой $y=x$ и что в начале координат все они касаются прямой $y+x=0$ (рис. 37).

Особых решений нет, ибо равенство $z+1=0$ не приводит к особым решениям уравнения (10), а полуоси оси Oy даже не являются решениями этого уравнения. (Отсутствие особых решений следует уже из того, что коэффициенты при dx и dy в уравнении (10) суть полиномы относительно x и y .)

Займемся теперь решением поставленных задач Коши:

а) полагая в уравнении (11) $x=2$, $y=2$, находим $C=2$, поэтому искомым решением будет $x^2+y^2=2(x+y)$ или $(x-1)^2+(y-1)^2=2$. Решения (12) не проходят через точку $(2, 2)$;

б) ни одна из окружностей (11) не проходит через точку $(1, -1)$. Зато полупрямая $y=-x$ ($0 < x < +\infty$) проходит через эту точку и дает искомое решение;

в) к началу координат примыкают все интегральные кривые. В отличие от случаев «а» и «б» здесь решение задачи Коши не единственно.

8. Для уравнения

$$xy' = 3y - 2x - 2\sqrt{xy - x^2} \quad (14)$$

найти интегральную кривую, проходящую через точки: а) $(1, 2)$; б) $(1, 1)$; в) $(0, 0)$.

Прежде всего заметим, что уравнение (14) положительно однородное. Оно

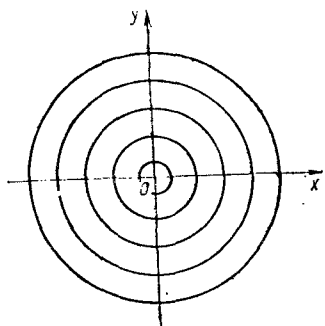


Рис. 36

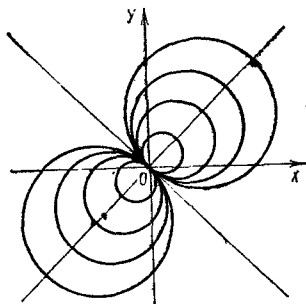


Рис. 37

задано только в той части плоскости, где подкоренное выражение неотрицательно: $xy - x^2 \geq 0$, а именно: на полупрямых $x=0$ ($y \neq 0$), $y=x$ ($x \neq 0$) и в области, определяемой неравенством $xy - x^2 > 0$, или $x(y-x) > 0$, т. е. в области, заключенной между этими полупрямыми (на рис. 38 эта область заштрихована).

Найдем общий интеграл. Имеем:

$$y = zx, \quad y' = xz' + z, \quad xz' - 2z + 2 + 2\sqrt{z-1} = 0,$$

$$\frac{dz}{2(z-1) - 2\sqrt{z-1}} - \frac{dx}{x} = 0 \quad (z-1 - \sqrt{z-1} = 0?),$$

$$\frac{dz}{2\sqrt{z-1}(\sqrt{z-1}-1)} - \frac{dx}{x} = 0,$$

$$\ln|\sqrt{z-1}-1| - \ln|x| = \ln|C_1|,$$

$$\frac{\sqrt{z-1}-1}{x} = C \quad (C = \pm |C_1|), \quad \sqrt{z-1} = 1 + Cx,$$

$$z = 1 + (1 + Cx)^2,$$

следовательно,

$$y = x(1 + (1 + Cx)^2) \quad (x \neq 0, 1 + Cx > 0) \quad (15)$$

будет общим решением уравнения (14).

Рассмотрим вопрос об особых решениях. Полуоси оси Oy $x=0$ ($y \neq 0$) являются частными решениями. Из уравнения $z-1-\sqrt{z-1}=0$ находим $z=1$, $z=2$. Это дает решения уравнения (14): $y=x$ ($x \neq 0$) — особое, $y=2x$ ($x > 0$) — частное.

Обратимся теперь к поставленным задачам Коши:

а) точка (1, 2) не особая. Полагая в общем решении (15) $x=1$, $y=2$, находим $C=0$, следовательно, искомым решением будет полупрямая $y=2x$ ($x > 0$);

б) точка (1, 1) особая, ибо она лежит на особом решении $y=x$ ($x > 0$). Следовательно, в этой точке нарушается единственность решения задачи Коши. Убедимся, что так оно и есть. Полагая в общем решении (15) $x=1$, $y=1$, находим $C=-1$, поэтому к точке (1, 1) примыкает частное решение $y=x(1+(1-x)^2)$ ($0 < x < 1$). Кроме него, через точку (1,1) проходит особое решение $y=x$ ($x > 0$);

в) точка (0, 0) особая. В ней поле не определено. Все интегральные кривые примыкают к этой особой точке.

9. Найти форму зеркала, собирающего все параллельные лучи в одну точку.

Пусть падающие лучи параллельны оси Ox , а за упомянутую точку примем начало координат. Из соображений симметрии ясно, что зеркало имеет форму поверхности вращения, описываемой некоторой кривой вокруг оси Ox . Найдем эту кривую. Пусть $M(x, y)$ — любая точка искомой кривой (рис. 39), SM и MO — соответственно падающий и отраженный лучи, TT' — касательная, NM — нормаль к искомой кривой в точке $M(x, y)$.

Так как $SMN = \angle OMN$ (угол падения равен углу отражения), то

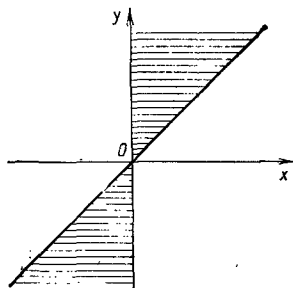


Рис. 38

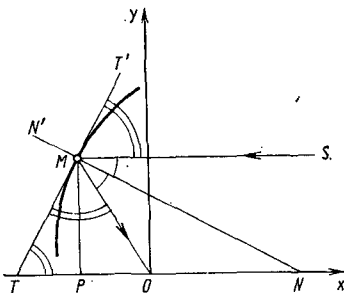


Рис. 39

$\angle SMT' = \angle OMT$. Далее, $\angle OTM = \angle SMT'$, следовательно, $\angle OTM = \angle OMT$, т. е. $\triangle MOT$ равнобедренный: $|OT| = |OM|$.

Для составления дифференциального уравнения задачи заметим, что, с одной стороны,

$$\operatorname{tg} \angle OTM = y', \quad (16)$$

с другой стороны, из $\triangle TMP$

$$\operatorname{tg} \angle OTM = \frac{|MP|}{|TP|}.$$

Но $|MP| = y$, $|TP| = |OT| - |OP| = |OM| - |OP| = \sqrt{x^2 + y^2} + x$, поэтому

$$\operatorname{tg} \angle OTM = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}. \quad (17)$$

Сравнивая равенства (16) и (17), приходим к дифференциальному уравнению задачи:

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

или

$$(\sqrt{x^2 + y^2} + x) dy - y dx = 0.$$

Это положительно однородное уравнение. (Заметим, что точки левой полуоси Ox : $y = 0$ ($x \leq 0$) — особые.) Здесь для интегрирования удобнее сделать подстановку $x = zy$, тогда

$$(\sqrt{z^2 y^2 + y^2} + zy) dy - y(z dy + y dz) = 0$$

или

$$\sqrt{z^2 + 1} dy - y dz = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{y} - \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = 0,$$

$$\ln y - \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) = -\ln C_1,$$

$$z + \sqrt{z^2 + 1} = C_1 y,$$

$$x + \sqrt{x^2 + y^2} = C_1 y^2, \quad y^2 = \frac{2}{C_1} \left(x + \frac{1}{2C_1} \right),$$

$$y^2 = 2C(x + C/2), \quad C = 1/C_1 > 0.$$

Искомые кривые — параболы, у которых параметр равен C , вершина лежит в точке $(-C/2, 0)$, а фокус находится в начале координат. Одна из них изображена на рис. 40. Поверхность зеркала — параболоид вращения.

10. Рассмотрим уравнение

$$(x + y - 2) dx + (x - y + 4) dy = 0. \quad (18)$$

Здесь условие (5) выполнено. Решая систему

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2 = 0, \\ \alpha - \beta + 4 = 0, \end{cases}$$

находим $\alpha = -1$, $\beta = 3$. Выполняя в уравнении (18) подстановку $x = \xi - 1$, $y = \eta + 3$, получаем однородное уравнение

$$(\xi + \eta) d\xi + (\xi - \eta) d\eta = 0.$$

Интегрируя его при помощи подстановки $\eta = z\xi$, находим

$$\xi^2 + 2\eta\xi - \eta^2 = C.$$

Возвращаясь к старым переменным x и y по формулам $\xi = x + 1$, $\eta = y - 3$, имеем

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C.$$

Эти гиперболы и образуют общий интеграл уравнения (18). Особых решений нет.

11. Дано уравнение

$$(2x - 2y - 1) dx + (x - y + 1) dy = 0. \quad (19)$$

Определитель из коэффициентов этого уравнения при dx и dy равен нулю. Полагая $z = x - y$, получаем $3zdx - (z+1)dz = 0$. Интегрируем последнее уравнение: $3x - z - \ln|z| = C$. Заменяя z на $x - y$, находим общий интеграл уравнения (19) в виде

$$2x + y - \ln|x - y| = C.$$

Особых решений нет.

В задачах 182—194 проинтегрировать уравнение.

182. $x(x + 2y) dx + (x^2 - y^2) dy = 0.$

183. $(x^2 - y^2) dx + 2xy dy = 0.$ (Сделать рисунок.)

184. $(py - qx) dx - (px + qy) dy = 0.$

185. $y' = (ax + by)/x$ ($b \neq 0$). 186. $y' = (x + 3y)/(2x).$

187. $y' = (x + 2y)/(-x).$ 188. $y' = (2x + y)/x.$

189. $y' = (x - y)/(x - 2y).$ 190. $y' = y/(x + y).$

191. $xdy - ydx = ydy.$ 192. $\frac{dx}{y+x} = \frac{dy}{y-x}.$

193. $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}.$ 194. $\frac{dx}{2x^2 - 2xy + 2y^2} = \frac{dy}{y^2 - 4xy}.$

В задачах 195—201 проинтегрировать уравнение и выделить интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M(x_0, y_0)$, выяснив предварительно вопрос о существовании и единственности этой интегральной кривой.

195. $(y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx - xdy = 0; \quad M(1, 0).$

196. $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}; \quad M(1, 1), M(1, 0).$ (Сделать рисунки.)

197. $y' = e^{-y/x} + y/x; \quad M(1, 0).$

198. $(x + 2y) dx - xdy = 0; \quad M(0, 0).$

199. $xy' = x + \frac{1}{2}y; \quad M(0, 0).$ 200. $xy' = x - y; \quad M(0, 0).$

201. $xdy - (x + y) dx = 0; \quad M(0, 0).$

В задачах 202—209 найти решения вида $y = kx$.

202. $y' = (x + 2y)/x$.

203. $xdy - (y + x)dx = 0$.

204. $y' = (y + \sqrt{y^2 - 4x^2})/x$.

205. $y' = e^{y/x} - 1$.

206. $y' = y/x$.

207. $y' = -x/y$.

208. $y' = -y/x$.

209. $ydx + (x - y)dy = 0$.

В задачах 210—217 определить область задания уравнения, область существования решения задачи Коши, область существования и единственности, указать особые точки и особые линии; изучить поле направлений, определяемое этим дифференциальным уравнением (найти изоклины, построить изоклины $y' = 0$, $y' = \pm 1$, $y' = \infty$, определить направления поля в точках, лежащих на осях координат, указать области возрастания и убывания решений, найти линии экстремумов, установить направление вогнутости и найти линии точек перегиба, сделать рисунок); сделать схематический набросок семейства интегральных кривых; проинтегрировать уравнение, найти все решения; изучить поведение интегральных кривых в окрестности особых точек и особых линий, на границе области задания уравнения и на бесконечности по аналитическому виду семейства интегральных кривых; сделать рисунок.

210. $y' = \frac{y}{2x}$.

211. $y' = -\frac{y}{2x}$.

212. $y' = \frac{x}{4y}$.

213. $y' = -\frac{x}{4y}$.

214. $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$.

215. $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$.

216. $y' = \frac{x-1}{-y-2}$.

217. $y' = \frac{y}{x-1}$.

В задачах 218—223 составить дифференциальное уравнение заданного семейства кривых.

218. $y = Cx^2$.

219. $y = C/x$.

220. $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C$.

221. $x^2 + y^2 - Cy = 0$.

222. $y - \sqrt{x^2 + y^2} = C$.

223. $x = Ce^{y/x}$.

224. Найти кривую, для которой треугольник, образованный осью Oy , касательной и радиусом-вектором точки касания, равнобедренный.

225. Найти кривую, подкасательная которой есть среднее арифметическое координат точки касания.

226. Найти кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого касательной на оси Oy , к отрезку, отсекаемому нормалью на оси Ox , есть величина постоянная, равная k .

227. Найти кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого нормалью на оси Ox , к радиусу-вектору точки касания есть величина постоянная, равная k .

228. Найти кривую, для которой треугольник, образованный нормалью с осями координат, был бы равновелик треугольнику, образованному осью Ox , касательной и нормалью.

229. Найти кривую, в каждой точке которой длина отрезка касательной равна длине отрезка, отсекаемого касательной на оси Ox .

230. Доказать, что всякая кривая, полученная из интегральной кривой однородного уравнения (2) с помощью преобразования подобия с центром подобия в начале координат, также является интегральной кривой и что, наоборот, все интегральные кривые, входящие в состав общего интеграла и не являющиеся полупрямыми, выходящими из начала координат, могут быть получены при помощи этого преобразования из одной такой интегральной кривой, если $\Phi(z) - z \neq 0$.

В задачах 231—233 проинтегрировать уравнение.

$$231. (2x - y + 1) dx + (2y - x - 1) dy = 0.$$

$$232. (x - y) dx + (2y - x + 1) dy = 0.$$

$$233. (x + y + 1) dx + (2x + 2y - 1) dy = 0.$$

234. Доказать, что уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + y) \sqrt{x^2 + y^2} - y}{(x - y) \sqrt{x^2 + y^2} - x}$$

имеет только один предельный цикл (см. [9, с. 96]). (У к а з а н и е. Перейти в уравнении к полярным координатам, проинтегрировать его, изучить поведение интегральных кривых, отличных от окружности, в случае, когда полярный угол стремится к $-\infty$.)

6. ОБОБЩЕННОЕ ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Общие понятия. Уравнение

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

называется *обобщенным однородным*, если удастся подобрать такое число k , что левая часть этого уравнения становится *однородной* функцией некоторой степени m относительно x, y, dx и dy при условии, что x считается величиной первого измерения, y — k -го измерения, dx и dy — соответственно нулевого и $(k-1)$ -го измерений (поэтому $y' = dy/dx$ — величина $(k-1)$ -го измерения). Например, таким будет уравнение

$$\left(\frac{2}{x^2} - y^2 \right) dx + dy = 0. \quad (2)$$

Действительно, при сделанном предположении относительно измерений x, y, dx и dy члены левой части $\frac{2}{x^2} dx$, $-y^2 dx$ и dy будут

иметь соответственно измерения -2 , $2k$ и $k-1$. Приравнявая их, получаем условие, которому должно удовлетворять искомое число k : $-2=2k=k-1$. Это условие выполняется при $k=-1$ (при таком k все члены левой части уравнения (2) будут иметь измерения -2). Следовательно, уравнение (2) является обобщенным однородным.

Обобщенное однородное уравнение (1) приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$y = zx^k,$$

где z — новая неизвестная функция.

Примеры. 1. Проинтегрируем указанным методом уравнение (2). Так как $k=-1$, то следует положить $y=z/x$, после чего получим уравнение

$$(z^2 + z - 2) dx - xdz = 0.$$

Интегрируя его, находим

$$z = \frac{C + 2x^3}{C - x^3},$$

откуда

$$y = \frac{C + 2x^3}{(C - x^3)x}.$$

Это общее решение уравнения (2).

2. Рассмотрим уравнение

$$(y + y\sqrt{x^2y^4 - 1}) dx + 2xdy = 0. \quad (3)$$

Прежде всего подберем число k (измерение переменной y) так, чтобы оба члена, стоящих под знаком квадратного корня (x^2y^4 и -1), имели одно и то же измерение. Так как первый из них имеет измерение $2+4k$, а второй — нулевое измерение, то $2+4k=0$, откуда $k=-1/2$. При таком выборе k все члены левой части уравнения (3) будут иметь одно и то же измерение относительно x , y , dx и dy , равное $-1/2$. Следовательно, это уравнение — обобщенное однородное. Считая $x>0$ и полагая $y=z/\sqrt{x}$, получаем $z\sqrt{z^4-1}dx + 2xdz = 0$. Это уравнение имеет общий интеграл

$$\ln x + \operatorname{arctg} \sqrt{z^4-1} = C$$

и особые решения $z = \pm 1$. Поэтому уравнение (3) имеет общий интеграл

$$\ln x + \operatorname{arctg} \sqrt{x^2y^4-1} = C$$

и особые решения $y = \pm 1/\sqrt{x}$.

Для отрицательных значений x нужно в подстановке $y=z/\sqrt{x}$ заменить x на $-x$, что приведет к замене x на $-x$ в найденных выше общем интеграле и особых решениях.

В задачах 235—238 проинтегрировать уравнение.

235. $(y^4 - 3x^2) dy + xy dx = 0.$

236. $y^3 dx + 2(x^2 - xy^2) dy = 0.$

237. $(x^2y^2 - 1) y' + 2xy^3 = 0.$

238. $(1 + \sqrt{y^2/x - 1}) dx - 2y dy = 0.$

7. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

Построение общего решения. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (1)$$

называется *линейным*. При этом уравнение

$$y' + p(x)y = 0, \quad (2)$$

в котором правая часть тождественно равна нулю, называется *однородным*, а уравнение (1), в котором $q(x) \not\equiv 0$, — *неоднородным*.

Будем предполагать, что $p(x)$ и $q(x)$ определены и непрерывны в интервале (a, b) . Тогда через каждую точку (x_0, y_0) полосы

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty \quad (3)$$

проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1) (почему?). Эта интегральная кривая определена во всем интервале (a, b) .

Таким образом, при постановке задачи Коши для линейного уравнения число x_0 можно брать любым из интервала (a, b) , в котором p и q непрерывны, а за y_0 — любое число.

Всякое решение линейного уравнения является частным, поэтому *особых решений оно не имеет* (почему?).

Однородное линейное уравнение всегда имеет *нулевое решение* $y \equiv 0$.

Общее решение однородного уравнения (2) в полосе (3) имеет вид

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad (4)$$

или в форме Коши

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} \quad (5)$$

Решение

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} (y_0 = 1)$$

называется *нормированным* в точке x_0 .

Все решения однородного линейного уравнения (2) содержатся в формуле общего решения (4) или (5) (почему?).

Всякое ненулевое решение однородного линейного уравнения целиком расположено или выше, или ниже оси Ox (почему?). Если y_1 — ненулевое решение уравнения (2), то $y = Cy_1$ есть общее решение этого уравнения.

Общее решение неоднородного уравнения (1) в полосе (3) состоит из общего решения соответствующего ему однородного уравнения

$$z' + p(x)z = 0 \quad (6)$$

и какого-нибудь одного частного решения y_1 самого неоднородного уравнения (1), так что *общее решение уравнения (1) имеет*

вид

$$y = y_1 + Ce^{-\int p(x)dx}. \quad (7)$$

Все решения неоднородного линейного уравнения (1) содержатся в формуле общего решения (7) (почему?).

Общее решение неоднородного уравнения (1) можно найти при помощи общего решения соответствующего однородного уравнения (6), варьируя в нем произвольную постоянную, т. е. полагая

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \quad (8)$$

где $C(x)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция от x (метод Лагранжа). Для нахождения ее подставляем y из выражения (8) в уравнение (1). Получаем

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

откуда

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Подставляя это значение $C(x)$ в выражение (8), находим

$$y = e^{-\int p(x)dx} (C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx). \quad (9)$$

Это общее решение уравнения (1) в области (3). Его можно переписать в форме Коши:

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} \left(y_0 + \int_{x_0}^x q(t)e^{\int_{x_0}^t p(\xi)d\xi} dt \right). \quad (10)$$

Отсюда видно, что всякое решение линейного уравнения является непрерывно дифференцируемой функцией как независимой переменной x , так и начальных данных x_0 и y_0 , если x и x_0 принадлежат интервалу непрерывности функций p и q , а $|y_0| < +\infty$.

Общее решение (9) неоднородного уравнения (1) может быть найдено также с помощью так называемого интегрирующего множителя (метод Эйлера). Умножаем обе части уравнения (1) на функцию $\mu = e^{\int p(x)dx}$ — интегрирующий множитель.

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

или

$$(ye^{\int p(x)dx})' = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Таким образом,

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C,$$

откуда и следует формула (9).

Примеры. 1. Найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 0.$$

Выделить решение, удовлетворяющее начальному условию $y=2$ при $x=1$.

Согласно формуле (4), общим решением будет

$$y = Ce^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = Ce^{\ln(1+x^2)}$$

или (так как $e^{\ln x} = x$)

$$y = C(1+x^2).$$

Решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию, согласно формуле (5), имеет вид

$$y = 2e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = 1+x^2.$$

2. Пронтегрировать уравнение

$$y' + \frac{1}{x} y = 3x \quad (x > 0) \quad (11)$$

и найти решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 1. \quad (12)$$

Согласно формуле (9),

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} (C + 3 \int x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx) = \frac{1}{x} (C + x^3).$$

При $x < 0$ общее решение имеет тот же вид. (Убедиться в этом.)

Для нахождения решения, удовлетворяющего начальному условию (12), воспользуемся формулой (10). Получим

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(1 + 3 \int_1^x x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right) = \frac{1}{x} \left(1 + 3 \int_1^x x^2 dx \right) = \frac{1}{x} (1 + x^3 - 1) = x^2.$$

Пронтегрируем уравнение (11) методом Эйлера. Здесь $\mu = x$, поэтому $(yx)' = 3x^2$, откуда $yx = x^3 + C$, $y = x^2 + C/x$.

3. Для уравнения

$$y' + ay = m, \quad (13)$$

где a, m — постоянные числа, отличные от нуля, легко найти одно частное решение, если искать его в виде $y = \text{const}$ (эти решения называются *стационарными*). Очевидно, что таким частным решением будет $y_1 = m/a$. Так как соответствующее однородное уравнение $z' + az = 0$ имеет общее решение $z = Ce^{-ax}$, то общим решением уравнения (13) будет

$$y = m/a + Ce^{-ax}.$$

4. Рассмотрим уравнение

$$xdy + (x^2 - y) dx = 0. \quad (14)$$

Это уравнение после деления обеих его частей на xdx приводится к линейному $y' - y/x = -x$. Интегрируя его, получаем $y = x(C - x)$.

Решениями уравнения (14) будут также полуоси оси Oy : $x=0$ ($y \neq 0$).

5. Уравнение

$$2ydx + (y^2 - 2x) dy = 0$$

приводится к линейному уравнению с неизвестной функцией x :

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} x = -\frac{y}{2}.$$

Интегрируя его, получаем

$$x = Cy - y^2/2.$$

6. Рассмотрим уравнение

$$y' + \lambda y = 0, \quad (15)$$

где λ — любое постоянное число (параметр).

Общим решением его будет

$$y = Ce^{-\lambda x}$$

или

$$y = y_0 e^{-\lambda(x-x_0)}, \quad (16)$$

где y_0 — произвольное; x_0 — некоторое фиксированное число.

Из формулы (16) мы видим, что решение уравнения (15) с начальными данными x_0, y_0 является непрерывной (и непрерывно дифференцируемой) функцией независимой переменной x , начальных данных x_0, y_0 и параметра λ .

Поведение решений уравнения (15) существенно зависит от знака параметра λ .

Если $\lambda > 0$, то из самого уравнения и формулы (16) его общего решения видно, что всякое решение, начинающееся в верхней полуплоскости ($y_0 > 0$), убывает, а решение, начинающееся в нижней полуплоскости ($y_0 < 0$), возрастает. При этом все решения стремятся к решению $y \equiv 0$ при $x \rightarrow +\infty$, поэтому ось Ox будет их общей асимптотой (рис. 41).

Если же $\lambda < 0$, то всякое решение, начинающееся в верхней полуплоскости, возрастает, а решение, начинающееся в нижней полуплоскости, убывает. При этом все решения стремятся к решению $y \equiv 0$ при $x \rightarrow -\infty$.

Сказанное выше о поведении решений переносится на случай уравнения $y' + p(x)y = 0$, где $p(x)$ сохраняет знак, причем:

$$\int_0^{\infty} p(x) dx = +\infty \quad \text{при } p(x) > 0,$$

$$\int_{-\infty}^0 p(x) dx = -\infty \quad \text{при } p(x) < 0.$$

7. Пусть дано интегральное уравнение

$$\int_a^x xy dx = x^2 + y \quad (17)$$

(ср. § 3, пример 10).

Дифференцируя обе его части по x в предположении, что $y = y(x)$, получаем

$$xy = 2x + y' \quad \text{или} \quad y' - xy = -2x. \quad (18)$$

Далее, полагая в уравнении (17) $x = a$, имеем $0 = a^2 + y$, т. е. искомая функция удовлетворяет условию

$$y = -a^2 \quad \text{при } x = a. \quad (19)$$

Следовательно, нужно найти решение линейного уравнения (18), удовлетворяющее начальному условию (19).

Искомым решением будет

$$y = -(a^2 + 2) e^{(x^2 - a^2)/2} + 2.$$

8. (Задача о токе в электрической цепи с самоиндукцией.) Пусть i , U и R — соответственно ток, напряжение и сопротивление в момент времени t , а L — коэффициент самоиндукции. Тогда имеем

$$U = iR + L \frac{di}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{U}{L}. \quad (20)$$

Обозначим через i_0 ток в начальный момент времени $t=0$. Чтобы установить закон изменения тока в рассматриваемой цепи, нужно найти решение уравнения (20), удовлетворяющее начальному условию

$$i = i_0 \text{ при } t = 0. \quad (21)$$

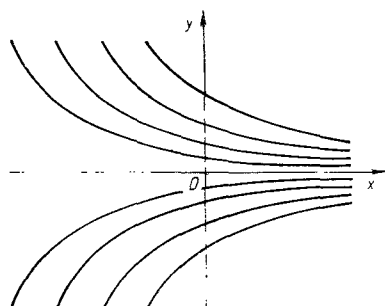


Рис. 41

Это решение можно записать сразу, пользуясь формулой общего решения в форме Коши. Получим

$$i = e^{-\int_0^t \frac{R}{L} dt} \left(i_0 + \int_0^t \frac{U}{L} e^{\int_0^t \frac{R}{L} dt} dt \right).$$

Будем считать U , R и L постоянными. Тогда

$$i = \frac{U}{R} + e^{-\frac{R}{L} t} \left(i_0 - \frac{U}{R} \right). \quad (22)$$

Покажем, как найти это же решение исходя из общего решения уравнения (20) в обычной форме. Заметим, что уравнение (20) имеет частное решение $i_1 = U/R$ (ср. пример 3). Прибавляя к этому частному решению общее решение соответствующего однородного уравнения, получаем общее решение уравнения (20) в виде

$$i = \frac{U}{R} + C e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (23)$$

Удовлетворяя начальному условию (21), находим $C = i_0 - U/R$, поэтому искомое решение дается формулой (22).

Второе слагаемое в формуле (23) стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, следовательно, $i \rightarrow U/R$, т. е. при достаточно больших t можно считать, что $i = U/R$ (закон Ома).

Рассмотрим случаи замыкания ($i_0 = 0$) и размыкания ($U = 0$) цепи. В первом случае

$$i = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t}), \quad i \rightarrow \frac{U}{R} \text{ при } t \rightarrow +\infty,$$

во втором

$$i = i_0 e^{-\frac{R}{L} t}, \quad i \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

В задачах 239—245 проинтегрировать уравнение, пользуясь формулой общего решения.

239. $y' - y \sin x = \sin x \cos x$.

240. $y' + ay = e^{mx}$. Доказать, что это уравнение имеет частное решение вида $y_1 = be^{mx}$, если $m \neq -a$, и $y_1 = bxe^{mx}$, если $m = -a$.

241. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$. 242. $xy' = ax + by$.

243. $ydx + 2(x + y)dy = 0$.

244. $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$.

245. $y' + \operatorname{tg} y = x/\cos y$. (Указание. Умножить обе части уравнения на $\cos y$ и положить $\sin y = z$.)

В задачах 246—248 найти общее решение с помощью интегрирующего множителя.

246. $y' - \frac{1}{x}y = x$. 247. $y' - \frac{2}{x}y = x^3$. 248. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

В задачах 249—253 найти общее решение, угадав предварительно одно частное решение.

249. $y' + y = x + 1$. Доказать, что уравнение $y' + ay = P(x)$, где $a = \operatorname{const} \neq 0$, а $P(x)$ — полином степени m , имеет частное решение вида $y_1 = Q(x)$, $Q(x)$ — полином той же степени m .

250. $y' + y = 2e^x$. (Ср. с задачей 240.)

251. $y' + xy = x^2 + 1$.

252. $y' + y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

253. $y' - \frac{1 + 2x}{x + x^2}y = \frac{1 + 2x}{x + x^2}$. Доказать, что всякое линейное уравнение $y' + p(x)y = q(x)$, имеющее частное решение $y_1 = b$, является уравнением с разделяющимися переменными.

В задачах 254—259 найти решение с начальными данными x_0, y_0 .

254. $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$; $x_0 = 1, y_0 = 1$.

255. $y' - 2xy = 1$; $x_0 = 0, y_0 = 0$.

256. $xy' = x + 2y$; $x_0 = 0, y_0 = 0$.

257. $xy' = x + \frac{1}{2}y$; $x_0 = 0, y_0 = 0$.

258. $xy' = x - y$; $x_0 = 0, y_0 = 0$.

259. $xy' = x + y$; $x_0 = 0, y_0 = 0$.

В задачах 260—262 определить область задания уравнения, область существования решения задачи Коши, область существования и единственности, указать особые точки; изучить поле направлений, определяемое этим дифференциальным уравнением (найти изоклины, указать области возрастания и убывания решений, найти линии экстремумов, установить направление вогнутости и найти линии точек перегиба); сделать схематический набросок семейства интегральных кривых; проинтегрировать уравнение, найдя все

решения; изучить поведение интегральных кривых в окрестности особых точек, на границе области задания уравнения и на бесконечности по аналитическому виду семейства интегральных кривых; сделать рисунок.

260. $y' + 2xy = 0$.

261. $y' - xy = 1$.

262. $y' - \frac{1}{x}y = x$.

263. Найти закон изменения тока в цепи с самоиндукцией, если $i = i_0$ при $t = 0$ и $U = A \sin \omega t$.

264. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного осью Ox , касательной и радиусом-вектором точки касания, постоянна и равна a^2 .

265. Найти кривую, касательная к которой отсекает на оси Oy отрезок, равный $1/n$ -й суммы координат точки касания.

266. Найти кривую, средняя ордината которой на отрезке $[0, x]$, т. е. величина $\frac{1}{x} \int_0^x y dx$, пропорциональна последней ординате, соответствующей правому концу отрезка $[0, x]$.

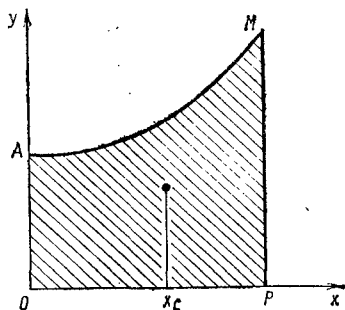


Рис. 42

267. Найти такую кривую AM (см. рис. 42), для которой абсцисса центра тяжести площади $OAMP$ была бы равна $3/4$ абсциссы точки M . (Указание. Если точка M имеет координаты x, y , а уравнение кривой AM есть $y = y(x)$, то абсцисса центра тяжести площади $OAMP$ выражается формулой $x_c = \left(\int_0^x xy dx \right) / \left(\int_0^x y dx \right)$ (почему?).)

268. Найти y из уравнения $x \int_0^x y dx = (x + 1) \int_0^x xy dx$.

269. Показать, что решение линейного уравнения $y' + p(x)y = q(x)$ с начальными данными x_0, y_0 может быть записано в виде

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} + \int_{x_0}^x q(\xi) e^{-\int_{\xi}^x p(t) dt} d\xi$$

(ср. с формулой (10)). (Указание. Искать решение в виде $y = C(x) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}$, $C(x_0) = y_0$.)

270. Доказать, что все решения уравнения $\dot{x} = ax + f(t)$, где $a = \text{const} < 0$, $f(t)$ непрерывна в $(t_0, +\infty)$, ограничены при $t \rightarrow +\infty$.

271. Доказать, что линейное уравнение $y' = ky + f(x)$, где k — постоянная, отличная от нуля, а $f(x)$ — периодическая функ-

ция периода ω , имеет одно частное решение, периодическое с тем же периодом ω , и найти это решение.

272. Найти общее решение уравнения $y' + p(x)y = 0$, где $p(x)$ непрерывна в интервале (a, b) , если известно ненулевое частное решение y_1 этого уравнения.

273. Найти общее решение неоднородного линейного уравнения, если известны два частных решения его: y_1 и y_2 .

274. Найти однородное линейное уравнение, если известно одно ненулевое частное решение y_1 этого уравнения.

275. Показать, что одним из решений уравнения $y' + ky = kq(x)$ ($0 \leq x < +\infty$), где k — постоянное число, будет функция $y = k \int_0^{\infty} q(x-t)e^{-kt} dt$.

276. Найти общее решение однородного линейного уравнения $y' + p(x)y = 0$, приведя его к уравнению с постоянным коэффициентом при y с помощью соответствующей замены независимой переменной $t = \psi(x)$.

277. Найти общее решение однородного линейного уравнения $y' + p(x)y = 0$, приведя его к уравнению, не содержащему члена с искомой функцией, с помощью введения новой искомой функции z по формуле $y = \alpha(x)z$, где $\alpha(x)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция от x .

278. То же для неоднородного уравнения $y' + p(x)y = q(x)$.

279. Найти частные производные от решения однородного линейного уравнения с начальными данными x_0, y_0 по этим начальным данным в точке (x_0, y_0) .

280. То же для неоднородного уравнения.

281. Общее решение линейного уравнения имеет вид $y = A(x)C + B(x)$. Доказать обратное: дифференциальное уравнение всякого семейства кривых этого вида есть линейное уравнение.

282. Доказать, что линейное уравнение остается линейным при любой замене независимой переменной $x = \varphi(t)$ и при любом линейном преобразовании искомой функции $y = \alpha(x)z + \beta(x)$.

283. Доказать, что всякая интегральная кривая линейного уравнения делит в постоянном отношении отрезок ординаты между какими-либо двумя интегральными кривыми этого уравнения.

284. Доказать, что касательные к интегральным кривым линейного уравнения, проведенные в точках пересечения этих кривых с прямой, параллельной оси Oy , или пересекаются в одной точке, или параллельны.

285. Доказать, что если в линейном уравнении $y' + ky = q(x)$ k — вещественное число, а $q(x)$ — непрерывная функция от x , имеющая конечное предельное значение на бесконечности: $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = b$, то при $k > 0$ все решения $y = y(x)$ этого уравнения обладают свойством $y(x) \rightarrow b/k$ при $x \rightarrow +\infty$, а при $k < 0$ существует только одно решение, обладающее этим свойством. Найти его.

286. Не интегрируя уравнение для тока i в электрической цепи с самоиндукцией (см. с. 61) $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{U}{L}$, где U , R и L — положительные числа, доказать, что все решения этого уравнения обладают свойством $t \rightarrow U/R$ при $t \rightarrow \infty$.

287. Привести уравнение $ay'(y)y' + P(x)\varphi(y) = Q(x)$ к линейному с помощью замены искомой функции.

288. Привести уравнение $y' + P(x) = Q(x)e^{ny}$ к линейному.

289. Показать, что единственным решением уравнения $y' - y = -1/x$ ($x > 0$), обладающим свойством $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ (особый случай задачи Коши), будет $y = \int_x^\infty (e^{x-t}/t) dt$. (Указание. Воспользоваться формулой (10).)

8. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Общие понятия. Уравнение Бернулли имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad (1)$$

где $p(x)$, $q(x)$ — функции от x , которые мы будем предполагать определенными и непрерывными в интервале (a, b) ; n — вещественное число, отличное от 0 и 1, ибо при $n=0$ и $n=1$ уравнение (1) обращается в линейное уравнение.

При сделанных предположениях существует единственное решение (интегральная кривая), проходящее через точку (x_0, y_0) , где $x_0 \in (a, b)$, а $y_0 \neq 0$ и $y_0 > 0$, если n — дробное (почему?). Это решение будет частным.

Уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению делением обеих его частей на y^n и введением новой искомой функции z по формуле

$$y^{1-n} = z.$$

При $n > 0$ уравнение Бернулли имеет решение $y = 0$. Это решение будет частным, если $n > 1$, и особым, если $0 < n < 1$ (почему?).

Примеры. 1. Проинтегрировать уравнение

$$y' - 2xy = 2x^3y^2 \quad (2)$$

и найти интегральную кривую, проходящую через точку $(0, 1)$.

Разделим обе части уравнения (2) на y^2 :

$$y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 2x^3. \quad (3)$$

Положим $y^{-1} = z$, тогда $-y^{-2}y' = z'$. Умножив обе части уравнения (3) на (-1) и выполняя указанную подстановку, получим линейное уравнение $z' + 2xz = -2x^3$. Интегрируя это уравнение, находим $z = Ce^{-x^2} + 1 - x^2$. Следовательно, общим решением уравнения (2) будет

$$y = \frac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2}. \quad (4)$$

Решение $y=0$ — частное ($n=2>1$); оно является асимптотой всех других интегральных кривых (4).

Интегральной кривой, проходящей через заданную точку $(0, 1)$, будет $y=1/(1-x^2)$.

2. Рассмотрим уравнение

$$y' + \frac{x}{1-x^2} y = x \sqrt{y}. \quad (5)$$

Делим обе его части на $\sqrt{y}$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{x}{1-x^2} \sqrt{y} = x.$$

Положим $\sqrt{y} = z$. Получим

$$z' + \frac{1}{2} \frac{x}{1-x^2} z = \frac{1}{2} x.$$

Интегрируя это (линейное) уравнение, находим

$$z = C \sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3} (1-x^2).$$

Следовательно,

$$\sqrt{y} = C \sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3} (1-x^2)$$

есть общий интеграл уравнения (5).

Решение $y=0$ — особое ($0 < n = 1/2 < 1$).

3. Пусть дано уравнение

$$y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{2y}.$$

Умножим обе его части на y :

$$yy' - \frac{1}{x} y^2 = \frac{1}{2}.$$

Положив $y^2 = z$, [придем к уравнению $z' - \frac{2}{x} z = 1$, откуда $z = Cx^2 - x$, и, следовательно, $y^2 = Cx^2 - x$.

Особых решений нет, ибо $y=0$ не является даже решением ($n=-1 < 0$).

4. Рассмотрим уравнение

$$(xy + x^2 y^3) y' = 1.$$

Перепишем его в виде

$$\frac{dx}{dy} = xy + x^2 y^3.$$

Это уравнение Бернулли с неизвестной функцией x . Интегрируя его, находим

$$x = \frac{1}{Ce^{-y^2/2} - y^2 + 2}.$$

Решение $x=0$ является асимптотой всех других интегральных кривых.

В задачах 290—297 проинтегрировать уравнение и, где указано, найти решение с начальными данными x_0, y_0 .

$$290. y' + 2xy = 2x^3y^3. \quad 291. xy' + y = y^2 \ln x; x_0 = 1, y_0 = 1.$$

$$292. 3y^2y' + y^3 + x = 0. \quad 293. y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{2/3}; x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$294. y' - y = xy^2; x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$295. xy' - y = y^2; x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$296. xy' + y = xy^2; x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$297. \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 \cos y + a \sin 2y}.$$

298. Найти кривую, в каждой точке которой поднормаль есть среднее арифметическое квадратов координат этой точки.

299. Определить кривые, у которых отрезок, отсекаемый нормалью на оси Ox , равен y^2/x .

300. Определить кривые, у которых отрезок, отсекаемый нормалью на оси Oy , равен x^2/y .

301. Найти кривые, у которых отрезок, отсекаемый касательной на оси Oy , равен квадрату ординаты точки касания.

302. Доказать по виду уравнения Бернулли, что единственной кривой, подозрительной на особое его решение, может быть ось Ox ($y=0$).

9. УРАВНЕНИЕ ДАРБУ

Общие понятия. Уравнение вида

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy + P(x, y)(xdy - ydx) = 0, \quad (1)$$

где M и N — однородные функции степени m , а P — однородная функция степени l ($l \neq m-1$), называется *уравнением Дарбу*. При этом одна из функций M и N может быть тождественным нулем.

Уравнение Дарбу, в котором $N \neq 0$, при помощи подстановки

$$y = zx, \quad (2)$$

где z — новая неизвестная функция, приводится к уравнению Бернулли (а в случае $l = m-2$ — к линейному уравнению) с искомой функцией x от независимой переменной z . Если $N \equiv 0$, то подстановка (2) приводит уравнение (1) к уравнению с разделяющимися переменными. Полупрямые $y = z_i x$ ($x \neq 0$), где z_i — корни уравнения $M(1, z) + N(1, z)z = 0$, могут быть особыми решениями.

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0.$$

Полагая $y = zx$, имеем

$$xdx + zx(xdz + zdx) + x^3dz = 0$$

или

$$(1 + z^2)dx + (zx + x^2)dz = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dz} + \frac{z}{1 + z^2}x = -\frac{1}{1 + z^2}x^2.$$

Это уравнение Бернулли. Интегрируя его, находим

$$1/x = C \sqrt{1+z^2} + z.$$

Заменив z на y/x , получаем

$$C \sqrt{x^2 + y^2} + y - 1 = 0.$$

2. Уравнение

$$xy' - y = x \sqrt{x^2 - y^2} \quad (3)$$

есть уравнение Дарбу, в котором $N \equiv 0$.

Полагаем $y = zx$:

$$x(z'x + z) - zx = x \sqrt{x^2 - z^2x^2}$$

или

$$z' = \sqrt{1 - z^2}.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$z = \sin(x + C) \quad \left(-\frac{\pi}{2} - C \leq x \leq \frac{\pi}{2} - C\right),$$

$z = \pm 1$ — особые решения. Следовательно,

$$y = x \sin(x + C) \quad \left(-\frac{\pi}{2} - C \leq x \leq \frac{\pi}{2} - C\right),$$

$y = \pm x$ ($x \neq 0$) — особые решения.

Заметим, что все интегральные кривые примыкают к началу координат, где поле не определено. Они расположены между полупрямыми $y = \pm x$ ($x \neq 0$) (в углах, заключающих ось Ox), которые, образуя границу области задания уравнения (3), сами являются решениями этого уравнения. Эти решения суть огибающие семейства интегральных кривых, составляющих общее решение. (Сделать рисунок.)

В задачах 303—306 проинтегрировать уравнение.

303. $dx - dy + x(xdy - ydx) = 0.$

304. $(x^2 + 2y^2)dx - xydy - (xdy - ydx) = 0.$

305. $(x^3 - y)dx + (x^2y + x)dy = 0.$ 306. $xy' - y = \varphi(y/x).$

10. УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

Общие понятия. Уравнение вида

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \quad (1)$$

в котором правая часть есть квадратичная функция от искомой функции y , называется *уравнением Риккати*.

Будем предполагать, что $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ определены и непрерывны в интервале (a, b) . Тогда через всякую точку (x_0, y_0) по-

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty$$

проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения Риккати (почему?). Однако в отличие от линейного уравнения для

уравнения Риккати эта интегральная кривая в общем случае определена не во всем интервале (a, b) , а лишь в некоторой окрестности начального значения независимой переменной. Например, решением уравнения $y' = y^2$ с начальными данными $x_0 = 0, y_0 = 1$ будет $y = 1/(1-x)$. Это решение определено только при $x < 1$, хотя правая часть уравнения определена и непрерывна при всех x .

Всякая интегральная кривая уравнения Риккати представляет собой график частного решения этого уравнения, так что *особых решений уравнение Риккати не имеет* (почему?).

Уравнение Риккати интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях.

Если известно одно частное решение y_1 уравнения Риккати, то подстановка

$$y = y_1 + 1/z, \quad (2)$$

где z — новая неизвестная функция, приводит это уравнение к линейному.

Уравнение Риккати вида

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2}, \quad (3)$$

где A, B и C — постоянные числа, причем $(B+1)^2 \geq 4AC$, имеет частное решение

$$y_1 = a/x, \quad (4)$$

a — некоторое постоянное число, определяемое подстановкой (4) в уравнение (3).

Уравнение (3) является также обобщенным однородным уравнением, в котором $k = -1$, и, следовательно, подстановкой $y = z/x$ всегда приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Уравнение Риккати вида

$$y' = a \frac{y^2}{x} + \frac{1}{2} \frac{y}{x} + c$$

или

$$xy' - \frac{1}{2}y - ay^2 = cx \quad (5)$$

подстановкой

$$y = z\sqrt{x}$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\sqrt{x}z' = az^2 + c$$

и, следовательно, всегда интегрируется в элементарных функциях.

Специальное уравнение Риккати

$$y' + Ay^2 = Bx^m$$

в случае, когда $m=0$, $m=-2$, интегрируется в элементарных функциях (почему?). Оно интегрируется в элементарных функциях также при всех m , для которых

$$m/(2m+4) = k \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (6)$$

ибо, если $m \neq 0$, $m \neq -2$, его можно привести к виду (5) [7].

Действительно, вводя вместо x и y новые переменные t и z по формулам

$$y = z/x, \quad x^{m+2} = t \quad (z = z(t)),$$

получаем уравнение

$$tz' + \alpha z + \beta z^2 = \gamma t \quad (\alpha = k - 1/2),$$

которое приводится к уравнению вида (5) с помощью последовательного применения подстановок:

$$z = \frac{t}{a+u} \quad \left(a = \frac{1+\alpha}{\gamma} \right) \quad \text{или} \quad z = a + \frac{t}{u} \quad \left(a = -\frac{\alpha}{\beta} \right), \quad (7)$$

соответственно увеличивающих или уменьшающих число α на единицу.

Уравнение Риккати (1) с помощью подстановки вида

$$y = \alpha(x)z$$

можно привести к такому уравнению Риккати, в котором коэффициент при квадрате искомой функции равен $+1$ или -1 .

Подстановкой вида

$$y = z + \beta(x)$$

можно, не меняя коэффициента при квадрате искомой функции, сделать коэффициент при искомой функции равным нулю.

Комбинируя указанные подстановки, всякое уравнение Риккати можно привести к виду

$$y' = \pm y^2 + R(x).$$

Если при этом окажется, что $R(x) = Bx^m$, получим специальное уравнение Риккати.

Примеры. 1. Найти общее решение уравнения

$$y' = -y^2 + 1 + x^2.$$

Очевидно, что $y_1 = x$ есть частное решение. Полагая $y = x + 1/z$, получаем $z' - 2xz = 1$, откуда $z = e^{x^2} \left(C + \int e^{-x^2} dx \right)$. Следовательно,

$$y = x + \frac{e^{-x^2}}{C + \int e^{-x^2} dx}.$$

2. Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2x^2}. \quad (8)$$

Это уравнение вида (3). Будем искать его частное решение в виде $y_1 = a/x$. Подставляя y_1 в уравнение (8), получаем

$$-\frac{a}{x^2} = \frac{a^2}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}, \quad a^2 + 2a + 1 = 0,$$

откуда $a = -1$. Следовательно, $y_1 = -1/x$. Полагая теперь $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$,

приходим к линейному уравнению $z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{2}$. Интегрируя его, находим

$$z = \frac{x}{2} (C - \ln |x|). \text{ Поэтому}$$

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x(C - \ln |x|)}.$$

3. Проинтегрировать специальное уравнение Риккати

$$y' = y^2 + x^{-4}. \quad (9)$$

Здесь $m = -4$, условие (6) выполнено, причем $k = 1$. Применяя подстановки $y = z/x$, $x^{-2} = t$ ($z = z(t)$), получаем

$$tz' + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}t \quad \left(\alpha = \frac{1}{2}\right).$$

Чтобы привести это уравнение к виду (5), нужно применить один раз вторую из подстановок (7), т. е. $z = -1 + t/u$, после чего имеем

$$tu' - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}t.$$

Это уравнение вида (5). Полагая $u = v\sqrt{t}$, находим $\sqrt{t}v' = (1 + v^2)/2$, откуда

$$v = \operatorname{tg}(\sqrt{t} + C) \quad (-C - \pi/2 < \sqrt{t} < -C + \pi/2).$$

Следовательно,

$$u = \sqrt{t} \operatorname{tg}(\sqrt{t} + C), \quad z = -1 + \sqrt{t} \operatorname{ctg}(\sqrt{t} + C).$$

Поэтому общим решением уравнения (9) будет

$$y = \frac{1}{x^2} \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x} + C\right) - \frac{1}{x}.$$

В задачах 307, 308 найти общее решение уравнения, имеющего частные решения вида $y = ax + b$.

$$307. y' = y^2 - xy - x. \quad 308. xy' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x.$$

В задачах 309—312 найти общее решение уравнения.

$$309. y' + y^2 = -1/(4x^2). \quad 310. x^2y' = x^2y^2 + xy + 1.$$

$$311. x^2y' + (xy - 2)^2 = 0. \quad 312. y' = y^2 + x^{-2}.$$

В задачах 313—316 проинтегрировать специальное уравнение Риккати.

$$313. y' = y^2 + x^{-4/3}. \quad 314. y' = -y^2 + x^{-8/3}.$$

$$315. y' = -y^2 + x^{-4}. \quad 316. y' = y^2 + x^{-8/5}.$$

В задачах 317, 318 найти общее решение уравнения, приведя коэффициент при квадрате неизвестной функции к единице.

$$317. xy' = x^2 y^2 - (2x+1)y + 1. \quad 318. xy' = x^2 y^2 - y + 1.$$

В задачах 319, 320 найти общее решение уравнения, приведя его к виду, не содержащему искомой функции.

$$319. y' = 4y^2 - 4x^2 y + x^4 + x + 4. \quad 320. y' = y^2 - 2x^2 y + x^4 + 2x + 4.$$

В задачах 321, 322 найти общее решение уравнения, приведя его к виду $y' = y^2 + c$.

$$321. xy' = x^2 y^2 + y + 2x^2 + 2. \quad 322. xy' = y^2 - 3y + 4x^2 + 2.$$

323. Найти общий интеграл уравнения Риккати, если известны три частных решения его. (У к а з а н и е. Воспользоваться формулой (2), найдя сначала два частных решения и общее решение соответствующего линейного уравнения.)

324. Доказать, что любые четыре частных решения y_1, y_2, y_3, y_4 уравнения Риккати связаны *ангармоническим соотношением*:

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} \equiv \text{const.}$$

325. Доказать, что если три частных решения уравнения Риккати являются периодическими с периодом ω , то и все его решения будут периодическими с тем же периодом.

326. Доказать, что общее решение уравнения Риккати есть дробно-линейная функция от произвольной постоянной C .

327. Доказать, что дифференциальное уравнение семейства кривых

$$y = \frac{C\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{C\psi_1(x) + \psi_2(x)}$$

есть уравнение Риккати.

328. Доказать, что уравнение Риккати остается таковым при любой замене независимой переменной $x = \varphi(t)$ и любом дробно-линейном преобразовании искомой функции

$$y = \frac{\alpha(x)z + \beta(x)}{\gamma(x)z + \delta(x)} \quad (\alpha(x)\delta(x) - \beta(x)\gamma(x) \neq 0, \quad a < x < b).$$

329. Доказать, что для уравнения $y' = x + y^2$ не существует решения, определенного при всех значениях x .

330. Доказать, что решение $y = y(x)$ уравнения $y' = x^2 - y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y = 0$ при $x = 0$, определено при всех $x \geq 0$, монотонно возрастает, допускает оценку $0 < y(x) < x$ при $x > 0$ и асимптотически стремится к прямой $y = x$ при $x \rightarrow +\infty$, т. е. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - x) = 0$.

331. Доказать, что решение $y = y(x)$ уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y = 0$ при $x = 0$, определено не при всех x и что оно представляет собою кривую, симметричную относительно начала координат и имеющую вертикальные асимптоты $x = \pm k$ ($2,002 < k < 2,005$).

Цикл задач 332—338 (Н. В. Адамов) посвящен вопросу о числе периодических решений уравнения Риккати с непрерывными периодическими коэффициентами.

332. Показать, что для любых трех непрерывных решений y_1, y_2, y_3 уравнения Риккати

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \quad (10)$$

с непрерывными коэффициентами выполняется соотношение вида $y_1 < y_2 < y_3$.

333. Составить уравнение Риккати (10) по трем непрерывным решениям y_1, y_2, y_3 . Показать, что если эти решения удовлетворяют условию $y_1 < y_2 < y_3$, то коэффициенты полученного уравнения непрерывны.

334. Доказать, что уравнение Риккати вида

$$y' = y^2 + p(x)y + q(x) \quad (11)$$

вполне определяется двумя непрерывными решениями. Составить уравнение Риккати вида (11) по двум непрерывным решениям y_1, y_2 .

335. Доказать, что у уравнения (11) нет ни одного периодического непрерывного решения, если функции $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ — корни уравнения

$$y^2 + p(x)y + q(x) = 0 \quad (12)$$

являются комплексными. (Указание. Учесть, что производная от непрерывной периодической функции не может сохранять знак при всех значениях аргумента.)

336. Доказать, что у уравнения (11) с периодическими непрерывными коэффициентами не может быть периодического непрерывного решения, удовлетворяющего начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$, если $y_0 > \max \bar{y}_2$ или $y_0 < \min \bar{y}_1$, где $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ — действительные для всех значений аргумента x корни квадратного уравнения (12), причем $\bar{y}_1 < \bar{y}_2$.

337. Доказать, что если y_1 и y_2 — два различных решения уравнения Риккати (11), то имеет место равенство

$$\frac{y_2' - y_1'}{y_2 - y_1} = y_1 + y_2 + p(x). \quad (13)$$

Показать, что если решения y_1, y_2 и функции p и q непрерывны, то левая часть равенства (13) есть производная от непрерывной функции.

338. Доказать, что уравнение Риккати (11) с непрерывными периодическими коэффициентами не может иметь более двух периодических решений. (Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.)

11. УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Построение общего интеграла. Если в уравнении

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$, то оно называется *уравнением в полных дифференциалах*. Это уравнение можно переписать в виде $dU=0$, так что его общий интеграл имеет вид

$$U(x, y) = C. \quad (2)$$

Например, уравнение $xdy + ydx = 0$ есть уравнение в полных дифференциалах, ибо его можно переписать в виде $d(xy) = 0$. Общим интегралом будет $xy = C$.

Предположим, что функции M и N определены и непрерывны в некоторой односвязной области D и имеют в ней непрерывные частные производные соответственно по y и по x . Тогда, для того чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (3)$$

Если условие (3) выполнено, то общий интеграл можно записать в виде

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C \quad (4)$$

или

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = C, \quad (5)$$

где нижние пределы x_0 и y_0 выбираются произвольно, но так, чтобы точка (x_0, y_0) принадлежала области D .

В этих формулах интегрирование производится по одной из переменных, в то время как вторая является параметром, причем в одном из интегралов параметр фиксируется (полагается равным нижнему пределу другого интеграла).

Особых решений уравнение в полных дифференциалах не имеет.

Укажем другой способ нахождения общего интеграла уравнения в полных дифференциалах, который часто оказывается на практике более удобным.

Функция U в общем интеграле (2) должна удовлетворять системе уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y) \quad (6)$$

(почему?). Интегрируя (частным образом) по x первое из уравнений (6), имеем

$$U(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y), \quad (7)$$

где $\varphi(y)$ — любая функция от y .

Выберем $\varphi(y)$ так, чтобы функция (7) была решением и второго из уравнений (6). Дифференцируя уравнение (7) по y и полагая $\partial U / \partial y = N$, получаем для нахождения $\varphi(y)$ легко интегрируемое дифференциальное уравнение $\varphi'(y) = \omega(y)$, правая часть которого зависит только от y (почему?). Интегрируя это уравнение, видим, что в качестве $\varphi(y)$ можно взять $\varphi(y) = \int \omega(y) dy$. Поэтому общий интеграл (2) можно записать так:

$$\int M(x, y) dx + \int \omega(y) dy = C. \quad (4')$$

Аналогично, исходя из уравнения $\partial U / \partial y = N$, приходим к общему интегралу вида

$$\int N(x, y) dy + \int \omega_1(x) dx = C. \quad (5')$$

З а м е ч а н и е. Общий интеграл уравнения (1) в полных дифференциалах можно также записать в виде

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M dx + N dy = C, \quad (8)$$

где левая часть есть криволинейный интеграл второго рода по любому пути, соединяющему фиксированную точку (x_0, y_0) с точкой (x, y) .

Решение задачи Коши. Решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 из области D в случае, когда в точке (x_0, y_0) функции M и N не обращаются одновременно в нуль, получается из общего интеграла (4) или (5) при $C=0$, т. е. по одной из формул

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = 0 \quad (4'')$$

или

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = 0. \quad (5'')$$

Если в точке (x_0, y_0) функции M и N одновременно обращаются в нуль, т. е. в ней поле не определено, то мы имеем особый случай задачи Коши: (x_0, y_0) — особая точка уравнения (1). Решение может не существовать или не быть единственным.

Решение задачи Коши в случае, когда общий интеграл получен в виде (4') или (5'), находится обычным способом (соответствующее значение произвольной постоянной C определяется подстановкой начальных данных в формулу общего интеграла). Если общий интеграл уравнения (1) задан в виде (8), то решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 можно найти из уравнения

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Mdx + Ndy = 0 \quad (9)$$

при условии, что $|M(x_0, y_0)| + |N(x_0, y_0)| \neq 0$.

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0. \quad (10)$$

Здесь $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x = 12xy$, т. е. условие (3) выполнено, и, следовательно, уравнение (10) есть уравнение в полных дифференциалах.

Покажем, что уравнение (10) легко привести к виду $dU=0$ непосредственной группировкой членов. С этой целью запишем его так:

$$3x^2dx + 6xy(ydx + xdy) + 4y^3dy = 0. \quad (11)$$

Здесь $3x^2dx = d(x^3)$, $6xy(ydx + xdy) = 6xyd(xy) = d(3(xy)^2)$, $4y^3dy = d(y^4)$. Поэтому уравнение (11) можно записать в виде

$$d(x^3) + d(3(xy)^2) + d(y^4) = 0$$

или

$$d(x^3 + 3(xy)^2 + y^4) = 0.$$

Следовательно,

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C \quad (12)$$

есть общий интеграл уравнения (10). Его левая часть, т. е. функция $x^3 + 3x^2y^2 + y^4$, является интегралом уравнения (10).

Найдем общий интеграл уравнения (10) по одной из формул общего интеграла, например по формуле (4). Взяв $x_0=0$, $y_0=0$, получим

$$\int_0^x (3x^2 + 6xy^2) dx + \int_0^y 4y^3 dy = C.$$

Выполняя квадратуры, снова приходим к общему интегралу (12).

Найдем решение уравнения (10) с начальными данными $x_0=1$, $y_0=0$. Пользуясь общим интегралом (12), находим $C=1$, так что искомым решением будет

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = 1. \quad (13)$$

Искомое решение можно найти сразу по одной из формул (4'') и (5''). Пользуясь, например, формулой (4''), имеем

$$\int_1^x (3x^2 + 6xy^2) dx + \int_0^y (6y + 4y^3) dy = 0,$$

откуда получаем искомое решение в виде (13).

2. Пусть дано уравнение

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \right) dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y} \right) dy = 0. \quad (14)$$

Это уравнение в полных дифференциалах. Но непосредственное интегрирование его с помощью группировки членов затруднительно. Поэтому воспользуемся формулой общего интеграла. В формуле (4) положим $x_0=1$, $y_0=2$ (почему нельзя брать $x_0=0$, $y_0=0$, $y_0=1$, $x_0=y_0$?).

$$\int_1^x \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \right) dx + \int_2^y \left(\frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{y} \right) dy = C$$

или

$$\ln \frac{x}{y} + \frac{xy}{x-y} = C. \quad (15)$$

Найдем общий интеграл уравнения (14) другим способом. Интегрируя по x коэффициент при dx , получим

$$U(x, y) = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2} \right) dx + \Phi(y)$$

или

$$U(x, y) = \ln x + \frac{y^2}{x-y} + \Phi(y). \quad (16)$$

Дифференцируя последнее уравнение по y и приравнявая коэффициенты при dy , находим

$$\frac{2xy - y^2}{(x-y)^2} + \Phi'(y) = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y},$$

откуда $\Phi'(y) = 1 - 1/y$, а тогда $\Phi(y) = y - \ln y$. Подставляя это значение $\Phi(y)$ в уравнение (16) и полагая $U = C$, находим общий интеграл, который снова будет иметь вид (15).

В задачах 339—346 найти интеграл и общий интеграл уравнения, не пользуясь формулами общего интеграла.

$$339. \quad xdx + ydy = 0. \quad 340. \quad \frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx = 0.$$

$$341. \quad \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = 0. \quad 342. \quad \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$343. \quad (2x - y + 1) dx + (2y - x - 1) dy = 0.$$

$$344. \quad xdx + ydy + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$345. \quad \frac{xdx + ydy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$346. \quad \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1 \right) dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$$

В задачах 347—349 проинтегрировать уравнение.

$$347. \quad \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1 + x^2} = 0.$$

$$348. \quad \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^3 - 3x^2}{y^4} dy = 0.$$

$$349. \quad (1 + e^{x/y}) dx + e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y} \right) dy = 0.$$

В задачах 350 — 352 найти решение с начальными данными x_0, y_0 .

350. $\frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2} = 0; x_0 = 1, y_0 = 0.$

351. $(x+y)dx + (x-y)dy = 0; x_0 = 0, y_0 = 0.$

352. $(x-y)dx + (2y-x)dy = 0; x_0 = 0, y_0 = 0.$

353. Проинтегрировать уравнение $ydx + xdy = 0$ ($x > 0, y > 0$) как уравнение в полных дифференциалах и как уравнение с разделяющимися переменными (не потенцируя). Найти зависимость между полученными общими интегралами $U = C$ и $U_1 = C_1$.

12. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Общие понятия. Если уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

не является уравнением в полных дифференциалах и существует функция $\mu = \mu(x, y)$, такая, что после умножения на нее обеих частей уравнения (1) получается уравнение

$$\mu(Mdx + Ndy) = 0$$

в полных дифференциалах, т. е.

$$\mu(Mdx + Ndy) = dU,$$

то функция μ называется *интегрирующим множителем*, а функция U — *соответствующим ему интегралом* уравнения (1). В случае, когда уравнение (1) уже есть уравнение в полных дифференциалах, полагают $\mu \equiv 1$.

Если найден интегрирующий множитель μ , то интегрирование данного уравнения сводится к умножению обеих его частей на μ и нахождению общего интеграла полученного уравнения в полных дифференциалах. Однако может случиться, что при этом мы теряем некоторые решения данного уравнения (эти решения могут быть особыми) или получаем посторонние решения. Первое может иметь место, когда μ во всех точках некоторой кривой обращается в бесконечность, второе — когда μ обращается в нуль (почему?). (Уравнение (1) заведомо не имеет особых решений, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются полиномами от x и y .)

Если μ есть непрерывно дифференцируемая функция от x и y , то

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что интегрирующий множитель μ удовлетворяет следующему уравнению с частными производными первого порядка:

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right). \quad (2)$$

Если заранее известно, что $\mu = \mu(\omega)$, где ω — заданная функция от x и y , то уравнение (2) сводится к обыкновенному (и при том линейному) уравнению с неизвестной функцией μ от независимой переменной ω :

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \psi(\omega) \mu, \quad (3)$$

где

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N(\partial\omega/\partial x) - M(\partial\omega/\partial y)} \equiv \psi(\omega), \quad (4)$$

т. е. дробь слева является функцией только от ω .

Решая уравнение (3), находим интегрирующий множитель

$$\mu = e^{\int \psi(\omega) d\omega} \quad (C = 1).$$

В частности, уравнение (1) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x ($\omega = x$) или только от y ($\omega = y$), если выполнены соответственно следующие условия:

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} \equiv \psi(x) \quad (\mu = e^{\int \psi(x) dx}) \quad (5)$$

или

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{-M} \equiv \psi(y) \quad (\mu = e^{\int \psi(y) dy}).$$

Однородное уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ имеет интегрирующий множитель

$$\mu = 1/(Mx + Ny),$$

если только $Mx + Ny \neq 0$. При этом уравнение $Mx + Ny = 0$ определяет все кривые, подозрительные на особое решение.

Знание двух различных интегрирующих множителей уравнения (1) дает возможность записать его общий интеграл вовсе без квадратур, а именно: если μ_1 и μ_2 суть два интегрирующих множителя уравнения (1), причем $\mu_1/\mu_2 \neq \text{const}$, то $\mu_1/\mu_2 = C$ есть общий интеграл этого уравнения. Отсюда следует, что если уравнение (1) есть уравнение в полных дифференциалах и известен его интегрирующий множитель $\mu \neq \text{const}$, то $\mu = C$ является общим интегралом этого уравнения.

В частности, если уравнение (1) однородное и в полных дифференциалах, то $Mx + Ny = C$ является его общим интегралом, если только $Mx + Ny \neq \text{const}$.

Интегрирующий множитель уравнения (1) иногда можно отыскать с помощью разбиения этого уравнения на группы, для каждой из которых легко находится интегрирующий множитель.

Пусть уравнение (1) допускает разбиение на две такие группы

$$(M_1(x, y)dx + N_1(x, y)dy) + (M_2(x, y)dx + N_2(x, y)dy) = 0 \quad (1')$$

и μ_1, μ_2 — их интегрирующие множители, так что

$$\mu_1(M_1 dx + N_1 dy) = dU_1, \quad \mu_2(M_2 dx + N_2 dy) = dU_2.$$

Попытаемся подобрать функции $\varphi(U_1)$ и $\psi(U_2)$ таким образом, чтобы

$$\mu_1 \varphi(U_1) = \mu_2 \psi(U_2). \quad (6)$$

Тогда функция

$$\mu = \mu_1 \varphi(U_1) = \mu_2 \psi(U_2)$$

будет интегрирующим множителем всего уравнения (1') (почему?), которое после умножения обеих его частей на этот интегрирующий множитель примет вид

$$\varphi(U_1) dU_1 + \psi(U_2) dU_2 = 0,$$

и, следовательно, общий интеграл уравнения (1) запишется так:

$$\int \varphi(U_1) dU_1 + \int \psi(U_2) dU_2 = C. \quad (7)$$

З а м е ч а н и е. Подбор функций φ и ψ иногда облегчается заменой интегралов U_1 и U_2 другими интегралами, определенными в той же области (см. ниже пример 3). Но тогда нельзя записывать общий интеграл по формуле (7).

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$(1 - x^2 y) dx + x^2 (y - x) dy = 0. \quad (8)$$

Проверим, не имеет ли оно интегрирующего множителя, зависящего только от x :

$$\frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2(y - x)} = -\frac{2}{x} \equiv \psi(x),$$

т. е. условие (5) выполнено. Поэтому

$$\mu = e^{\int \psi(x) dx} = e^{-\int (2/x) dx} = 1/x^2.$$

Умножая обе части уравнения (8) на $1/x^2$, получаем

$$(1/x^2 - y) dx + (y - x) dy = 0.$$

Для контроля правильности вычислений убедимся, что это уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя его (непосредственной группировкой членов), находим

$$-1/x - xy + y^2/2 = C. \quad (9)$$

Прежде чем считать интегрирование данного уравнения законченным, нужно посмотреть, не обращается ли μ в ∞ или в 0.

Хотя μ и обращается в бесконечность при $x=0$, а $x=0$ является решением данного уравнения (8), но это решение частное; оно содержится в общем интеграле (9) при $C=\infty$. В нуль μ не обращается.

2. Проинтегрировать уравнение

$$(\sqrt{x^2 - y} + 2x) dx - dy = 0, \quad (10)$$

если известно, что для него $\mu = \mu(x^2 - y)$.

Полагаем в условии (4) $\omega = x^2 - y$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N (\partial \omega / \partial x) - M (\partial \omega / \partial y)} &= \frac{(-1) / (2\sqrt{x^2 - y})}{-2x + (\sqrt{x^2 - y} + 2x)} = \\ &= -\frac{1}{2(x^2 - y)} = -\frac{1}{2\omega} \equiv \psi(\omega). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mu = e^{\int \psi(\omega) d\omega} = e^{-\int (1/2\omega) d\omega} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y}}.$$

Умножая обе части уравнения (10) на $1/\sqrt{x^2 - y}$ и интегрируя, находим

$$x + 2\sqrt{x^2 - y} = C.$$

Здесь μ обращается в бесконечность в точках кривой $y = x^2$. Функция $y = x^2$ является решением уравнения (10), и притом особым (почему?).

3. Проинтегрировать уравнение

$$y(1 + xy) dx + \left(\frac{1}{2} x^2 y + y + 1 \right) dy = 0 \quad (11)$$

с помощью интегрирующего множителя, найдя последний разбиением уравнения на группы.

Перепишем уравнение (11) в виде следующих двух групп:

$$\left(y(1 + xy) dx + \frac{1}{2} x^2 y dy \right) + (y + 1) dy = 0.$$

Для первой из них $\mu_1 = 1/y$, $U_1 = x + \frac{1}{2} x^2 y$. Вторая группа представляет собой полный дифференциал, так что $\mu_2 = 1$, $U_2 = y^2/2 + y$.

Равенство (6) примет вид

$$\frac{1}{y} \Phi \left(x + \frac{1}{2} x^2 y \right) = 1 \cdot \Psi \left(\frac{y^2}{2} + y \right). \quad (12)$$

Функцию Φ нужно подобрать так, чтобы левая часть этого равенства стала функцией, зависящей только от y . Поэтому нужно положить $\Phi(U_1) = \text{const}$, например $\Phi(U_1) = 1$. Далее для удобства подбора функции Ψ заменим интеграл U_2 интегралом $U_2 = y$. Тогда равенство (12) можно переписать в виде $1/y = \Psi(y)$, поэтому интегрирующим множителем уравнения (11) будет $\mu = 1/y$.

Умножая обе части уравнения (11) на $\mu = 1/y$, получаем уравнение в полных дифференциалах

$$(1 + xy) dx + \left(\frac{1}{2} x^2 + 1 + \frac{1}{y} \right) dy = 0.$$

Интегрируя его, находим:

$$U = x + \frac{x^2}{2} y + \Phi(y); \quad \Phi'(y) = 1 + \frac{1}{y}, \quad \Phi(y) = y + \ln y.$$

Общим интегралом уравнения (11) будет

$$x + \frac{x^2}{2} y + y + \ln y = C.$$

В задачах 354 — 358 проинтегрировать уравнение, для которого $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$.

$$354. \left(\frac{x}{y} + 1 \right) dx + \left(\frac{x}{y} - 1 \right) dy = 0.$$

$$355. (x^2 + y) dx - x dy = 0.$$

$$356. (2xy^2 - y) dx + (y^2 + x + y) dy = 0.$$

$$357. (xy^2 + y) dx - xdy = 0.$$

$$358. (x \cos y - y \sin y) dy + (x \sin y + y \cos y) dx = 0.$$

В задачах 359 — 362 решить уравнение с помощью интегрирующих множителей одного из видов: $\mu = \mu(x + y)$, $\mu = \mu(xy)$, $\mu = \mu(x^2 - y^2)$, $\mu = \mu(x^2 + y^2)$.

$$359. x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0.$$

$$360. x \left(4 + \frac{1}{x^2 - y^2} \right) dx - y \left(4 - \frac{1}{x^2 - y^2} \right) dy = 0.$$

$$361. (y + x^2) dy + (x - xy) dx = 0.$$

$$362. \left(2y + \frac{1}{(x + y)^2} \right) dx + \left(3y + x + \frac{1}{(x + y)^2} \right) dy = 0.$$

В задачах 363 — 365 проинтегрировать уравнение (однородное) с помощью интегрирующего множителя.

$$363. xdy - (x + y)dx = 0. \quad 364. (py - qx)dx - (px + qy)dy = 0.$$

$$365. y' = 2\sqrt{y/x} + y/x.$$

В задачах 366 — 368 найти без квадратур общий интеграл уравнения.

$$366. (x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0; \mu_1 = \mu_1(x), \mu_2 = \mu_2(x^2 - y^2).$$

$$367. \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0; \mu = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

$$368. (x + y)dx + (x - y)dy = 0.$$

В задачах 369, 370 проинтегрировать уравнение с помощью интегрирующего множителя, найдя последний разбиением уравнения на группы.

$$369. \left(\frac{2}{y} + \frac{y}{x^3} \right) dx + \left(\frac{1}{xy} - \frac{2}{x^2} \right) dy = 0.$$

370. $axdy + bydx + x^m y^n (axdy + bydx) = 0$ ($a\beta - b\alpha \neq 0$). Найти общий интеграл в случае $a\beta - b\alpha = 0$.

13. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вопросы

1. Что называется обыкновенным дифференциальным уравнением? Что такое порядок дифференциального уравнения; степень дифференциального уравнения? Всякое ли дифференциальное уравнение имеет степень?

2. Что называется решением (интегральной кривой) дифференциального уравнения? В чем состоит задача интегрирования дифференциального уравнения?

3. Каковы основные формы задания уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной? В каких видах могут быть заданы решения?

4. Как возникают дифференциальные уравнения при математическом моделировании реальных процессов? (Привести пример.) Как составить дифференциальное уравнение заданного однопараметрического семейства кривых?

5. Как определить наклон интегральной кривой уравнения первого порядка в заданной точке (x_0, y_0) по виду уравнения? Что такое поле направлений, определяемое дифференциальным уравнением? Что такое изоклины? Может ли интегральная кривая уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, иметь излом? Могут ли интегральные кривые этого уравнения пересекаться между собой; касаться друг друга?

6. В чем состоит задача Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной? При каком условии она имеет решение? При каких условиях это решение будет заведомо единственным?

7. Что такое общее решение? Как решается задача Коши при помощи формулы общего решения? Что такое общее решение в форме Коши? Что такое общий интеграл? Что такое общее решение в параметрической форме?

8. Что такое частное решение? Как оно связано с формулой общего решения?

9. Какое решение называется особым? Как оно может быть связано с формулой общего решения? Как найти кривые, подозрительные на особое решение, по самому дифференциальному уравнению? В каком случае уравнение заведомо не имеет особых решений? Почему огибающая семейства интегральных кривых будет особым решением? Как можно обнаружить кривые, подозрительные на особое решение, в процессе интегрирования данного дифференциального уравнения? Может ли дифференциальное уравнение иметь решения, которые не являются ни частными, ни особыми?

10. Как интегрируются неполные дифференциальные уравнения вида $y' = f(x)$, $y' = f(y)$?

11. Как интегрируются уравнения с разделенными и разделяющимися переменными?

12. Какое уравнение называется однородным (положительно однородным)? Какова особенность поля направлений, определяемого этим уравнением? Что представляют собой изоклины однородного уравнения? Как оно интегрируется?

13. Какое уравнение называется обобщенным однородным? Как оно интегрируется?

14. Какое уравнение называется линейным? При каком условии задача Коши для линейного уравнения имеет единственное решение? Какова при этом условии степень произвола выбора началь-

ных данных решений этого уравнения? В каком интервале существуют решения? Может ли график ненулевого решения однородного уравнения пересекать ось Ox или касаться ее? Может ли линейное уравнение иметь особые решения?

15. Какой вид имеет общее решение однородного линейного уравнения (в обычной форме и в форме Коши)? Как найти общее решение однородного линейного уравнения, если известно одно ненулевое частное решение его?

16. Как найти общее решение неоднородного линейного уравнения, если известно одно частное решение его и общее решение соответствующего однородного уравнения?

17. В чем заключается сущность методов Лагранжа и Эйлера нахождения общего решения неоднородного линейного уравнения?

18. Какой вид имеет общее решение неоднородного линейного уравнения (в обычной форме и в форме Коши)?

19. Как интегрируется уравнение Бернулли? При каком условии $y=0$ будет решением, когда это решение является частным и когда особым?

20. Как интегрируется уравнение Дарбу?

21. Какой вид имеет уравнение Риккати? Какова степе́нь произвола выбора начальных данных решений этого уравнения? Гарантируется ли существование решения во всем интервале непрерывности коэффициентов уравнения? Может ли уравнение Риккати иметь особые решения? Как найти общее решение уравнения Риккати, если известно одно частное решение его?

22. При каком условии уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах? Какой вид имеет его общий интеграл?

23. В чем заключается сущность метода интегрирующего множителя? При каком условии существует интегрирующий множитель, зависящий: а) от заданной функции от x и y ; б) только от x ; в) только от y ?

Задачи

В задачах 371—420 определить область задания уравнения, область существования решения задачи Коши, область существования и единственности, указать особые точки и особые линии; изучить поле направлений, определяемое этим дифференциальным уравнением (найти изоклины, построить изоклины $y'=0$, $y'=\pm 1$, $y'=\infty$, определить направление поля в точках, лежащих на осях координат, указать области возрастания и убывания решений, найти линии экстремумов, установить направление вогнутости и найти линии точек перегиба, сделать рисунок); сделать схематический набросок семейства интегральных кривых; проинтегрировать уравнение, найдя все решения; изучить поведение интегральных кривых в окрестности особых точек и особых линий, на границе области задания уравнения и на бесконечности по аналитическому виду семейства интегральных кривых; сделать рисунок.

371. $y' = a$.

372. $y' = ax$.

373. $y' = ax^2$.

374. $y' = |x|$. 375. $y' = 1/|x|$. 376. $y' = 1/\sqrt{x}$.
 377. $y' = |x|/x$. 378. $y' = 2\sqrt{x}$. 379. $y' = 2\sqrt{|x|}$.
 380. $y' = x/\sqrt{x^2 - 1}$. 381. $y' = 1/\sqrt{1 - x^2}$. 382. $y' = ay$.
 383. $y' = ay^2$. 384. $y' = -\frac{1}{2}y^3$. 385. $y' = a^2 - y^2$.
 386. $y' = a^2 - y^2$. 387. $y' = y^4$. 388. $y' = |y|$.
 389. $y' = |y|/y$. 390. $y' = 1/|y|$. 391. $y' = 2\sqrt{y-1}$.
 392. $y' = -\sqrt{2-y}$. 393. $y' = 2\sqrt{|y-1|}$. 394. $y' = -3y^{2/3}$.
 395. $y' = \frac{3}{2}y^{1/3}$. 396. $y' = y^{3/2}$. 397. $y' = y \ln |y|$.
 398. $yy' = -x^3$. 399. $y' = (x - xy^2)/(-y + x^2y)$.
 400. $x^3y' = 2y$. 401. $y' = -2y/x$. 402. $y' = 2y/x$.
 403. $y' = -y/x$. 404. $y' = y/x$. 405. $y' = -x/y$.
 406. $y' = \frac{x}{y}$. 407. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$. 408. $y' = \frac{y}{(x+y)}$.
 409. $y' = \frac{(2x+y)}{x}$. 410. $y' = \frac{2xy}{(x^2 - y^2)}$. 411. $yy' = x + y - 1$.
 412. $y' + 2xy = 1$. 413. $y' = -y \cos x$. 414. $y' - (2/x)y = x$.
 415. $y' = xy/(\sqrt{1-x^2})$. 416. $y' = (-x - 2x^3)/(y + 2y^3)$.
 417. $y' = \begin{cases} 1, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$ 418. $y' = \begin{cases} -x/y, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}$
 419. $y' = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ 2y/x, & 0 < y \leq x^2, x \neq 0; \\ 2x, & y > x^2. \end{cases}$
 420. $y' = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 4x, & x > 0, y > x^2; \\ -4x, & x > 0, y < -x^2; \\ 4y/x, & x > 0, |y| \leq x^2. \end{cases}$

В задачах 421—425 доказать, пользуясь теоремой Пикара, существование и единственность решения, удовлетворяющего поставленному начальному условию; оценить интервал существования решения; построить второе приближение к искомому решению (по методу Пикара).

421. $y' = x^2 + y^2$, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$; $y = 0$ при $x = 0$.
 422. $y' = x^2 - y^2$, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$; $y = 0$ при $x = 0$.
 423. $y' = \sin(xy)$, $|x| \leq 1$, $|y| < +\infty$; $y = 1$ при $x = 0$.

$$424. y' + \frac{1}{x-1} y = 0; y = 1 \text{ при } x = 0.$$

$$425. y' = |y|; y = 1 \text{ при } x = 0.$$

В задачах 426, 427 найти методом Пикара решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию.

$$426. y' = y; y = 1 \text{ при } x = 0.$$

$$427. y' = y^2; y = 1 \text{ при } x = 0.$$

В задачах 428—430 доказать, пользуясь теоремой Коши, существование и единственность голоморфного решения, удовлетворяющего поставленному начальному условию; оценить область сходимости степенного ряда, представляющего решение, найти свободный член и коэффициенты при $x-x_0$, $(x-x_0)^2$ и $(x-x_0)^3$ в разложении решения в ряд по степеням $x-x_0$.

$$428. y' = x^2 + y^2, |x| \leq 1, |y| \leq 1; y = 0 \text{ при } x = 0.$$

$$429. y' + \frac{1}{x-1} y = 0; y = 1 \text{ при } x = 0.$$

$$430. y' + \frac{1}{2-x} y = 0; y = 2 \text{ при } x = 1.$$

В задачах 431—433 найти голоморфное решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию.

$$431. y' = y^2; y = 1 \text{ при } x = 0.$$

$$432. y' = 1 + 2xy; y = 0 \text{ при } x = 0.$$

$$433. y' + \frac{2x}{1+x^2} y = 0; y = 1 \text{ при } x = 0.$$

В задачах 434—436 для каждого линейного уравнения найти (пользуясь теоремами Пикара и Коши) и сравнить оценки области существования решения и области сходимости степенного ряда, представляющего решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию. (В задачах 434, 435 сравнить найденные оценки с фактическими областями существования решения и сходимости ряда, представляющего решение.)

$$434. y' + \frac{x}{1+x^2} y = x; y = y_0 \text{ при } x = 0.$$

$$435. y' - \frac{1}{x-2} y = 0; y = y_0 \text{ при } x = x_0 \neq 2.$$

$$436. y' + \frac{1}{2(1-x)} y = 0; y = y_0 \text{ при } x = x_0 \neq 1.$$

В задачах 437—440 выяснить, какие начальные данные можно задавать, чтобы задача Коши заведомо имела единственное реше-

ние. Оценить область существования решения и область сходимости степенного ряда, представляющего решение.

$$437. x^2 y' + xy = 1. \quad 438. y' + e^x y = 0.$$

$$439. y' + y \ln x = 0. \quad 440. y' + y \sqrt{1+x} = 0.$$

В задачах 441—447 найти голоморфные и неголоморфные решения $y = y(x)$, обладающие свойством $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

$$441. xy' = ax + by. \quad 442. xy' = x + (1/2)y.$$

$$443. xy' = x + y. \quad 444. xy' = y + x^2.$$

$$445. xy' = -y + x^2. \quad 446. xy' = -y - xy^2. \quad 447. x^3 y' = 2y.$$

В задачах 448—451 найти решения $y = y(x)$, обладающие указанным свойством.

$$448. y' = 1/(y - y_0); y \rightarrow y_0 \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

$$449. y' = y/x; y \rightarrow y_0 \neq 0, x \rightarrow 0.$$

$$450. y' = -x/y; y \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_0 \neq 0.$$

$$451. y' = -x^2/y; y \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_0 \neq 0.$$

В задачах 452—455 найти решения $y = y(x)$, обладающие свойством $|y| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_* - 0$ или $x \rightarrow x_* + 0$.

$$452. y' = y^2. \quad 453. y' = -\frac{1}{2} y^3. \quad 454. y' = -\frac{1}{3} y^4. \quad 455. y' = y.$$

В задачах 456—471 определить тип каждого уравнения и указать метод его интегрирования.

$$456. (x/y - x + y^2) dx + (-x^2/(2y^2) + 2xy + y) dy = 0.$$

$$457. (x + x^2) y' - (1 + 2x) y = 1 + 2x.$$

$$458. 2(y - 2xy - x^2 \sqrt{y}) + x^2 y' = 0.$$

$$459. (x^3 - xy^2 + y) dx + (2x^2 y - x) dy = 0.$$

$$460. (y + x^3) dy + (3x^5 - 3x^2 y) dx = 0.$$

$$461. (x + 2y + 1) dx - (x - 3) dy = 0.$$

$$462. xyy' - y^2 = (x^2 + y^2) x/(y - x).$$

$$463. (xy - 3x + 5y - 15) dx + (xy - 2x + y - 2) dy = 0.$$

$$464. (x + y - 1) dx - (x - y - 1) dy = 0.$$

$$465. (y - 1) dx + 2(x + 1) dy = 0.$$

$$466. (3x + 3y - 1) dx + (x + y + 1) dy = 0.$$

$$467. ydx + (2x - y^2) dy = 0.$$

$$468. (x^2 + y^2 + 1) dy + xydx = 0. \quad 469. y' = y^2 - x^2 + 1.$$

$$470. ydx + (x - 2\sqrt{x/y}) dy = 0. \quad 471. y' = y^2 - 2/x^2.$$

В задачах 472—507 проинтегрировать уравнение и, где указано, выделить решение с начальными данными x_0, y_0 , исследовав предварительно вопрос о существовании и единственности его.

$$472. y' = 3x^2; x_0 = 0, y_0 = 0. \quad 473. y' = \operatorname{sh} x; x_0 = 0, y_0 = 1.$$

$$474. y' = 1/x; x_0 = 1, y_0 = 0; x_0 = 0, y_0 = 1.$$

$$475. y' = 1/(2\sqrt{x}); x_0 = 1, y_0 = 1; x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$476. y' = 1/\sqrt{1-x^2}.$$

$$477. y' = y^2; x_0 = 0, y_0 = 1; x_0 = 1, y_0 = 0.$$

$$478. y' = 1-y^2; x_0 = 0, y_0 = 0; x_0 = 0, y_0 = 2; x_0 = 0, y_0 = -2.$$

$$479. y' = y; x_0 = 0, y_0 = 1; x_0 = 2, y_0 = 0.$$

$$480. y' = -y; x_0 = 0, y_0 = 1. \quad 481. y' = 1+y^2; x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$482. y' = 1/y; x_0 = 2, y_0 = 2; x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$483. y' = 2\sqrt{y}; x_0 = 0, y_0 = 1; x_0 = 1, y_0 = 0.$$

$$484. y' = 2\sqrt{|y|}; x_0 = 1, y_0 = 0. \quad 485. y' = y \cos x; x_0 = 0, y_0 = 1.$$

$$486. y' = \sqrt{y/x}. \quad 487. y' = -x/\sqrt{1-x^2}.$$

$$488. y' = xy/\sqrt{1-x^2}; x_0 = 1, y_0 = 1; x_0 = 1, y_0 = 0.$$

$$489. y' = 2y/x. \quad 490. y' = (x+y)/x. \quad 491. y' = y/x.$$

$$492. y' = -y/x. \quad 493. y' = (y-x)/(y+x).$$

$$494. y' = -\frac{x}{y}. \quad 495. y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}. \quad 496. y' = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x}.$$

$$497. y' - \frac{1+2x}{x+x^2} y = \frac{1+2x}{x+x^2}; x_0 = 0, y_0 = -1.$$

$$498. y' - xy = 1; x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$499. xy' - y = x^2; x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$500. y' - y = xy^2; x_0 = 0, y_0 = 1.$$

$$501. xy' - y = -y^2; x_0 = 0, y_0 = 1; x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$502. y' = \frac{4}{x^2} y = x\sqrt{y}; x_0 = 0, y_0 = 1; x_0 = 0, y_0 = 0.$$

$$503. dx - dy + x(xdy - ydx) = 0. \quad 504. y' + y^2 = 1 + x^2.$$

$$505. 9x^2 y' = -18x^2 y^2 + 2. \quad 506. xydx + (x^2/2 + 1/y) dy = 0.$$

$$507. (x + y/x) dx + (1 + y^3/x) dy = 0.$$

В задачах 508—513 найти по виду уравнения кривые, подозрительные на особое решение, и проверить, будут ли они особыми решениями.

$$508. y' = (y-1)^{2/3}.$$

$$509. y' = \sqrt{y} + a.$$

$$510. y' = ax + \sqrt{x^2 - y}. \quad 511. y' = \sqrt{y - x} + a.$$

$$512. y' = \sqrt{y - x} + ax. \quad 513. y' = \sqrt{y/x}.$$

В задачах 514—518 доказать по виду уравнения, что оно не имеет особых решений.

$$514. y' = x^2 + y^4. \quad 515. y' = \frac{y - x}{y + x}.$$

$$516. (x^2 - xy + y^3) dx + (y^3 - x^2) dy = 0.$$

$$517. y' = \sin(xy). \quad 518. y' = x + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В задачах 519—521 по виду семейства интегральных кривых найти кривые, подозрительные на особое решение, и проверить, будут ли они особыми решениями.

$$519. y' = 2\sqrt{y}; y = (x + C)^2 \quad (x \geq -C).$$

$$520. xy' = y + \sqrt{y/x}; y = x(C - 1/x)^2 \quad (x \neq 0, C - 1/x \geq 0).$$

$$521. y' = \sqrt{b^2 - y^2}/y; (x - C)^2 + y^2 = b^2 \quad (x \leq C).$$

II. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

Основные понятия и определения. Уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет следующий общий вид:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Функция $y=y(x)$, имеющая непрерывную производную и обращающая уравнение (1) в тождество, называется *решением* этого уравнения. Решение может быть задано в неявном виде: $\Phi(x, y) = 0$ и в параметрической форме: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$.

График решения называется *интегральной кривой*. Все интегральные кривые являются г л а д к и м и.

Так же, как и уравнение, разрешенное относительно производной, уравнение (1) определяет некоторое *поле направлений*. Но здесь, как правило, в каждой точке (x_0, y_0) задается не несколько направлений поля, т. е. несколько значений y' . Все они находятся из уравнения

$$F(x_0, y_0, y') = 0. \quad (2)$$

Интегральная кривая обладает тем свойством, что в каждой ее точке направление касательной совпадает с одним из направлений поля, определяемых уравнением (1) в этой точке.

Задача нахождения решений $y=y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющих начальному условию $y(x_0)=y_0$, или, что то же, — интегральных кривых, проходящих через заданную точку (x_0, y_0) , называется *задачей Коши (начальной задачей)*. При этом говорят, что имеет место *единственность решения задачи Коши*, если число интегральных кривых, проходящих через точку (x_0, y_0) , совпадает с числом направлений поля, определяемых уравнением (1) в этой точке, поэтому для каждого из значений y_0 , определяемых уравнением (2), существует одно и только одно решение $y=y(x)$ уравнения (1), такое, что $y(x_0)=y_0$ и $y'(x_0)=y'_0$. Для этого достаточно потребовать, чтобы функция $F(x, y, y')$ была непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, y'_0) и $\partial F/\partial y'$ была отлична от нуля в этой точке.

Решение уравнения (1) называется *частным*, если в каждой точке его сохраняется единственность решения задачи Коши.

Если в каждой точке решения нарушается единственность решения задачи Коши, то оно называется *особым*.

Нахождение особых решений. Если левая часть уравнения (1) непрерывна по совокупности переменных x, y, y' и имеет частную производную по y' , то кривую, подозрительную на особое решение, можно найти исключением y' из системы

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, y') &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y'} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Эта кривая называется *дискриминантной кривой уравнения (1)*. Чтобы она была особым решением, нужно, чтобы она была решением уравнения (1) и в каждой точке ее нарушалась единственность решения задачи Коши.

Огибающая семейства интегральных кривых всегда является особым решением. Правило нахождения огибающей указано в § 1 гл. I.

Кривые, подозрительные на особое решение, можно обнаружить также в процессе интегрирования данного дифференциального уравнения.

В следующих параграфах мы рассмотрим вопросы нахождения общего решения (общего интеграла) различных типов уравнений, не разрешенных относительно производной.

2. УРАВНЕНИЕ n -Й СТЕПЕНИ

Построение общего интеграла. Рассмотрим уравнение вида

$$A_0(x, y) y'^n + A_1(x, y) y'^{n-1} + \dots + A_{n-1}(x, y) y' + A_n(x, y) = 0, \quad (1)$$

в котором левая часть есть полином n -й степени относительно y' . Такое уравнение называется *уравнением первого порядка n -й степени*. Предположим, что, разрешая его относительно y' , мы получаем m ($m \leq n$) вещественных решений

$$y' = f_k(x, y) \quad (k = \overline{1, m}). \quad (2)$$

Если для каждого из полученных уравнений (2) удастся найти общий интеграл

$$\psi_k(x, y) = C \quad (k = \overline{1, m}),$$

то совокупность последних будем называть *общим интегралом уравнения (1)*. Этот общий интеграл можно записать и в виде одного соотношения

$$(\psi_1(x, y) - C)(\psi_2(x, y) - C) \dots (\psi_m(x, y) - C) = 0,$$

в котором левая часть есть полином m -й степени относительно произвольной постоянной C .

Особые решения. Если уравнения (2) имеют особые решения, то каждое из этих решений будет особым решением уравнения (1).

Уравнение, квадратное относительно y' . Это уравнение вида

$$y'^2 + 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0. \quad (3)$$

Решаем уравнение (3) относительно y' :

$$y' = -P(x, y) \pm \sqrt{P^2(x, y) - Q(x, y)}.$$

Эти уравнения заданы в области $P^2 - Q \geq 0$. Проинтегрировав их, найдем общий интеграл уравнения (3).

Особым решением может быть только дискриминантная кривая

$$P^2(x, y) - Q(x, y) = 0,$$

получающаяся, согласно § 1, исключением y' из системы

$$\left. \begin{aligned} y'^2 + 2P(x, y)y' + Q(x, y) &= 0, \\ 2y' + 2P(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Примеры. 1. Проинтегрировать уравнение

$$y'^2 - 4x^2 = 0 \quad (4)$$

и выделить интегральные кривые, проходящие через заданную точку: а) $M(1, 1)$; б) $O(0, 0)$.

Из уравнения (4) находим $y' = 2x$, $y' = -2x$. Интегрируя, получаем

$$y = x^2 + C, \quad y = -x^2 + C \quad (5)$$

или

$$(y - x^2 - C)(y + x^2 - C) = 0.$$

Это общий интеграл. Он представляет собой два семейства парабол (5), наложенных друг на друга, как показано на рис. 43. Особых решений нет.

Решим поставленные задачи Коши:

а) подставляя начальные данные $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ в первое из семейств (5), имеем $1 = 1 + C$, откуда $C = 0$. Поэтому $y = x^2$. Аналогично второе из семейств (5) дает решение $y = -x^2 + 2$. Итак, через точку $M(1, 1)$ проходят две интегральные кривые: $y = x^2$ и $y = -x^2 + 2$. Единственность решения задачи Коши при этом не нарушается, ибо в точке $M(1, 1)$ уравнение (4) определяет два направления поля: $y' = 2$ и $y' = -2$;

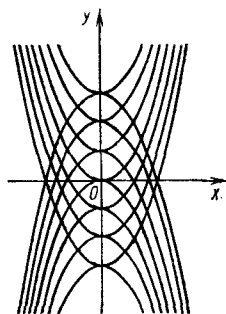


Рис. 43

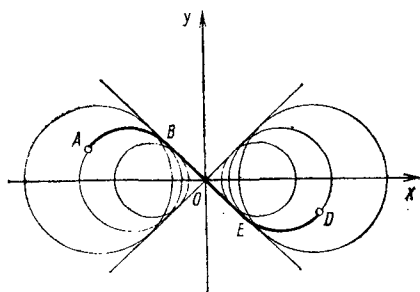


Рис. 44

б) подставив начальные данные $x_0=0$, $y_0=0$ в общее решение (5), выделим решения $y=x^2$ и $y=-x^2$. Кроме того, решениями будут

$$y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad y = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Единственность решения задачи Коши в точке $O(0, 0)$ нарушена, ибо направление поля в этой точке одно: $y'=0$, в то время как через нее проходит не одна интегральная кривая.

2. Рассмотрим уравнение

$$y^2 y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0. \quad (6)$$

Решая его относительно y' , получаем

$$y' = \frac{x \pm \sqrt{2} \sqrt{x^2 - y^2}}{y}.$$

Интегрируем эти уравнения:

$$y dy = (x \pm \sqrt{2} \sqrt{x^2 - y^2}) dx, \quad \frac{x dx - y dy}{\pm \sqrt{x^2 - y^2}} = \sqrt{2} dx,$$

$$\mp \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{2}x + C, \quad x^2 - y^2 = (\sqrt{2}x + C)^2,$$

откуда

$$(x + C\sqrt{2})^2 + y^2 = C^2. \quad (7)$$

Это общий интеграл. Он представляет собой семейство окружностей с центрами в точках $(-C\sqrt{2}, 0)$ и радиусом, равным C (рис. 44).

Особым решением может быть только дискриминантная кривая $x^2 - y^2 = 0$, которая распадается на прямые $y=x$, $y=-x$.

Полупрямые $y=\pm x$ ($x \neq 0$) будут особыми решениями. Они являются огибающими семейства окружностей (7). Кроме того, уравнение (6) имеет интегральные кривые вида ABO и OED (см. рис. 44), составленные из отрезков частных и особых решений.

В задачах 522—531 проинтегрировать уравнение и, где указано, выделить интегральные кривые, проходящие через заданную точку $M(x_0, y_0)$.

522. $yy'^2 - (xy + 1)y' + x = 0$; $M(1, 1)$.

523. $y'^3 - 4y = 0$; $M(1, 1)$, $M(1, 0)$. 524. $y'^2 = 4|y|$.

525. $y'^3 = \frac{1}{4|x|}$.

526. $y^2(1 + y'^2) = a^2$.

527. $y'^3 - \frac{1}{4x}y' = 0$.

528. $y'^3 - x\bar{y}'^2 - 4yy' + 4xy = 0$; $M(0, 1)$, $M(1, 0)$, $M(0, 0)$.

529. $yy' + y'^2 = x^2 + xy$.

530. $xy' = \sqrt{1 + y'^2}$.

531. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.

В задачах 532—536 найти по виду уравнения кривые, подозрительные на особые решения, и проверить, будут ли они особыми решениями.

532. $(xy' + y)^2 + 3x^5(xy' - 2y) = 0$.

$$533. y'^2 - 2yy' + x^2 = 0.$$

$$534. y'^2 - 4y = 0.$$

$$535. y'^2 - 2xy' + 2x^2 - y = 0.$$

$$536. y'^2 - 4yy' - y'^2 + 4y = 0.$$

В задачах 537, 538 найти по виду общего интеграла кривые, подозрительные на особое решение, и проверить, будут ли они особыми решениями.

$$537. y^2(1 + y'^2) = a^2; (x + C)^2 + y^2 = a^2.$$

538. $y'^2 - 4y = 0$; $(\sqrt{y} - x - C)(\sqrt{y} + x - C) = 0$. (Указание. Сначала разрешить уравнение семейства интегральных кривых относительно y .)

539. Найти кривые, для которых отрезок, отсекаемый касательной на оси Ox , равен радиусу-вектору точки касания.

540. Найти кривые, для которых длина отрезка нормали равна радиусу-вектору точки касания.

541. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $\sqrt{y - x^2 - C}^2 - x^2/4 = 0$.

542. Составить дифференциальное уравнение софокусных эллипсов с данным межфокусным расстоянием, равным $2c$.

3. НЕПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение, содержащее только y' . Это уравнение вида

$$F(y') = 0. \quad (1)$$

Оно имеет общий интеграл

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \quad (2)$$

Если корни уравнения $F(t) = 0$ заполняют с п л о щ ь некоторый интервал, то уравнение (1) может иметь решения, не содержащиеся в общем интеграле (2).

Уравнение, не содержащее искомой функции. Это уравнение вида

$$F(x, y') = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим два случая.

1. Уравнение (3) разрешимо относительно y' . Пусть оно определяет m значений y' :

$$y' = f_k(x) \quad (k = \overline{1, m}).$$

Отсюда, интегрируя, получаем

$$y = \int f_k(x) dx + C \quad (k = \overline{1, m}).$$

2. Уравнение (3) неразрешимо (в элементарных функциях) относительно y' , но допускает параметрическое представление:

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t). \quad (4)$$

В этом случае удастся найти общее решение в параметрической форме.

Воспользуемся для этого *основным соотношением* $dy = y' dx$.

Заменим справа y' и dx их значениями из представления (4):

$$dy = \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Проинтегрировав, найдем

$$y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C.$$

Присоединяя сюда $x = \varphi(t)$, получаем *общее решение уравнения (3) в параметрической форме*:

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C.$$

Если существует такое конечное число a , при котором

$$\lim_{\substack{y' \rightarrow +\infty \\ (y' \rightarrow -\infty)}} F(a, y') = 0,$$

то $x = a$ есть решение уравнения (3). Это решение может оказаться особым.

Уравнение, не содержащее независимой переменной. Это уравнение вида

$$F(y, y') = 0. \quad (5)$$

Здесь также имеют место два случая.

1. Уравнение (5) разрешимо относительно y' :

$$y' = f_k(y) \quad (k = \overline{1, m}).$$

Тогда

$$\int \frac{dy}{f_k(y)} = x + C \quad (k = \overline{1, m}).$$

2. Уравнение (5) допускает параметрическое представление:

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t).$$

Тогда

$$dy = y' dx, \quad \varphi'(t) dt = \psi(t) dx, \quad dx = \varphi'(t) dt / \psi(t),$$

поэтому

$$x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + C, \quad y = \varphi(t).$$

Уравнение (5) может иметь особые решения вида $y = b$, где b определяется из уравнения $F(b, 0) = 0$.

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$e^{y'} + y' = 1.$$

Это уравнение типа (1). Его общим интегралом будет

$$e^{(y-C)/x} + \frac{y-C}{x} = 1.$$

2. Проинтегрировать уравнение

$$e^{y'} + y' = x. \quad (6)$$

Это уравнение типа (3). Но оно разрешено относительно x . В таких случаях за параметр обычно принимают y' , т. е. полагают $y' = t$, после чего x легко выражается через t : $x = e^t + t$. В результате получаем параметрическое представление уравнения (6) в виде

$$x = e^t + t, \quad y' = t.$$

Теперь имеем:

$$dy = y' dx = t(e^t + 1) dt, \quad y = \int t(e^t + 1) dt + C,$$

$$y = e^t(t - 1) + t^2/2 + C,$$

откуда

$$x = e^t + t, \quad y = e^t(t - 1) + t^2/2 + C.$$

3. Пусть дано уравнение

$$x = ky' / \sqrt{1 + y'^2}. \quad (7)$$

Хотя это уравнение тоже разрешено относительно x , тем не менее с целью упрощения вычисления интеграла при нахождении y удобнее положить не $y' = t$, а $y' = \operatorname{tg} t$. Тогда параметрическим представлением уравнения (7) будет

$$x = \pm k \sin t, \quad y' = \operatorname{tg} t$$

($x = k \sin t$) при $\cos t > 0$, $x = -k \sin t$ при $\cos t < 0$.

Далее находим:

$$dy = \pm \operatorname{tg} t \cdot k \cos t \, dt = \pm k \sin t \, dt,$$

$$y = \mp k \cos t + C.$$

В результате имеем:

$$x = \pm k \sin t, \quad y = \mp k \cos t + C.$$

Исключив параметр t , получим общий интеграл

$$x^2 + (y - C)^2 = k^2. \quad (8)$$

Посмотрим, не имеет ли уравнение (7) решений вида $x = a$, о которых шла речь ранее. Правая часть уравнения (7) имеет конечные пределы при $y' \rightarrow \pm\infty$. Они равны $\pm k$. Поэтому прямые $x = \pm k$ будут решениями уравнения (7). Эти решения — особые. Они являются огибающими семейства (8) (рис. 45, $k > 0$).

4. Рассмотрим уравнение

$$y = y'^2 e^{y'}. \quad (9)$$

Это уравнение типа (5), причем оно разрешено относительно y . Положим $y' = t$, тогда

$$y = t^2 e^t, \quad y' = t.$$

Далее находим:

$$dy = y' dx, \quad (2t + t^2) e^t dt = t dx, \quad dx = (2 + t) e^t dt,$$

$$x = \int (2 + t) e^t dt = e^t(1 + t) + C,$$

поэтому

$$x = e^t(1 + t) + C, \quad y = t^2 e^t.$$

Полагая в уравнении (9) $y = b$, получаем $b = 0$, так что $y = 0$ — решение уравнения (9). Это решение особое.

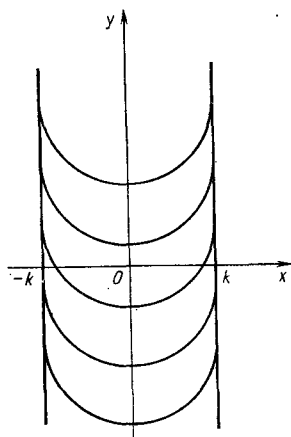


Рис. 45

В задачах 543—558 проинтегрировать уравнение.

543. $y'^3 + 1 = 0$. 544. $y'^3 - 3y' + 1 = 0$.
 545. $y' - \sin y' = 0$. 546. $y' - |y'| = 0$. 547. $y'^4 - 1 = 0$.
 548. $x = ay' + by'^3$. 549. $x(1 + y'^2)^{3/2} = a$.
 550. $x = y'^3 + 1$. 551. $xy'^3 = 1 + y'$. 552. $x = y' \ln y'$.
 553. $x^3 - y'^3 = xy'$. (Указание. Сделав подстановку $y' = tx$, выразить x , а затем y' через t).
 554. $y = y'^3/2 + \ln y'$. 555. $y = y'^3 + 2y'^3$. 556. $y^{2/3} + y'^{2/3} = a^{2/3}$.
 557. $y^3 + y'^3 - 3ayy' = 0$. 558. $y/\sqrt{1 + y'^2} = a$.

4. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО

Уравнение Лагранжа. Уравнение вида

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \quad (\varphi(y') \neq y'),$$

в котором y является линейной функцией от x с коэффициентами, зависящими от y' , причем коэффициент при x не равен y' , называется *уравнением Лагранжа*. Построение его общего решения в параметрической форме сводится к интегрированию некоторого линейного уравнения.

Положим $y' = p$, где p — параметр, тогда

$$y = \varphi(p)x + \psi(p). \quad (1)$$

Заменяем в равенстве $dy = y'dx$ величину dy ее значением из выражения (1), а вместо y' подставим p :

$$\varphi(p) dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p)) dp = p dx$$

или

$$(\varphi(p) - p) dx + (\varphi'(p)x + \psi'(p)) dp = 0.$$

Это уравнение можно привести к линейному с искомой функцией x , если разделить обе части его на dp и $\varphi(p) - p$. Получим

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \quad (\varphi(p) - p \neq 0). \quad (2)$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$x = A(p)C + B(p).$$

Подставляем это значение x в (1):

$$y = A_1(p)C + B_1(p).$$

Таким образом, уравнение Лагранжа имеет следующее общее решение в параметрической форме:

$$x = A(p)C + B(p), \quad y = A_1(p)C + B_1(p).$$

Если уравнение $\varphi(p) - p = 0$ имеет вещественные решения $p = p_i$ ($i = \overline{1, n}$), то, подставляя их в уравнение (1) и принимая во внимание, что $\varphi(p_i) = p_i$, получаем

$$y = p_i x + \psi(p_i) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Эти прямые линии могут оказаться особыми решениями уравнения Лагранжа.

Уравнение Клеро. Уравнение вида

$$y = xy' + \psi(y') \quad (\psi(y') \neq ay' + b) \quad (3)$$

называется *уравнением Клеро*. Оно отличается от уравнения Лагранжа только тем, что в нем коэффициент при x равен y' .

Применяя тот же метод, что и для интегрирования уравнения Лагранжа, полагаем $y' = p$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$y = xp + \psi(p). \quad (4)$$

Далее имеем $dy = y'dx, p dx + (x + \psi'(p)) dp = p dx$ или

$$(x + \psi'(p)) dp = 0.$$

Это уравнение распадается на два: $dp = 0$ и $x + \psi'(p) = 0$.

Из $dp = 0$ следует, что $p = C$. Подставляя это значение p в уравнение (4), имеем

$$y = xC + \psi(C). \quad (5)$$

Это семейство прямых линий есть *общее решение* уравнения Клеро. Оно получается из уравнения Клеро заменой y' на C .

Уравнение $x + \psi'(p) = 0$ вместе с уравнением (4) образует решение уравнения Клеро в параметрической форме

$$x = -\psi'(p), \quad y = -\psi'(p)p + \psi(p), \quad (6)$$

которое обычно является *особым*. Оно будет заведомо особым, если $\psi''(p)$ сохраняет знак, ибо тогда (6) является *огнибающей* семейства (5).

В самом деле, дискриминантной кривой семейства (5) будет $y = xC + \psi(C), \quad 0 = x + \psi'(C)$ или

$$x = -\psi'(C), \quad y = -\psi'(C)C + \psi(C), \quad (7)$$

что отличается от уравнений (6) только обозначением параметра. Если $\psi''(C)$ не меняет знака, то решение (7) есть заведомо *огнибающая* семейства (5).

Итак, *общее решение уравнения Клеро получается заменой в последнем y' на C , а особое решение ищется как огнибающая семейства прямых, составляющих общее решение.*

К уравнению Клеро приходят каждый раз, когда ищут кривую по свойству ее касательной, не зависящему от точки касания. При этом с геометрической точки зрения наибольший интерес представляет *особое* решение.

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$y = 2xy' - y'^2. \quad (8)$$

Это уравнение Лагранжа. Следуя указанному выше методу, имеем:

$$y' = p, \quad y = 2xp - p^2,$$

$$dy = y' dx, \quad 2p dx + (2x - 2p) dp = p dx,$$

$$p dx + (2x - 2p) dp = 0, \quad \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p} x = 2 \quad (p \neq 0?),$$

$$x = \frac{C}{p^2} + \frac{2}{3} p, \quad y = \frac{2C}{p} + \frac{p^2}{3}.$$

Подставляя $p=0$ в равенство $y=2xp-p^2$, находим $y=0$. Это решение уравнения (8), и притом частное.

2. Проинтегрировать уравнение

$$y = xy' + y'^2. \quad (9)$$

Это уравнение Клеро. Заменяя y' на C , получаем общее решение

$$y = xC + C^2. \quad (10)$$

Ищем огибающую семейства (10). Имеем

$$y = xC + C^2, \quad 0 = x + 2C$$

или

$$x = -2C, \quad y = -C^2.$$

Исключая параметр C , получаем

$$y = -x^2/4. \quad (11)$$

Очевидно, что это огибающая семейства (10) и потому особое решение уравнения (9). Интегральными кривыми уравнения (9) являются парабола (11) и всевозможные касательные к ней (рис. 46). Кроме того, интегральной кривой будет всякая кривая вида ABC , «склеенная» из дуги параболы (11) и касательной к ней.

3. Найти кривую, отрезок касательной к которой, заключенный между осями координат, имеет постоянную длину a .

Из уравнения касательной $Y - y = y'(X - x)$ в точке $M(x, y)$ к искомой кривой (рис. 47) находим отрезки OA и OB , отсекаемые ею на осях координат:

$$|AO| = x - y/y', \quad |OB| = y - xy'.$$

Так как, по условию, $AB = a$, то

$$(x - y/y')^2 + (y - xy')^2 = a^2$$

или

$$(y - xy')^2 (1/y'^2 + 1) = a^2,$$

откуда

$$y = xy' \pm ay' / \sqrt{1 + y'^2}. \quad (12)$$

Каждое из уравнений (12) есть уравнение Клеро. Интегрируя их, находим

$$y = xC \pm aC / \sqrt{1 + C^2}.$$

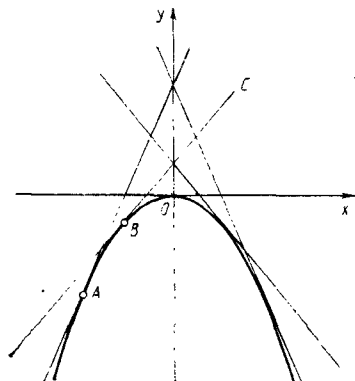


Рис. 46

Ищем огибающую (именно она нас и интересует!). Имеем:

$$y = xC \pm \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}, \quad 0 = x \pm \frac{a}{(1+C^2)^{3/2}}$$

или

$$x = \mp \frac{a}{(1+C^2)^{3/2}}, \quad y = \pm \frac{aC^3}{(1+C^2)^{3/2}}.$$

Исключая параметр C , получаем

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Эта астроида и есть искомая кривая (рис. 48).

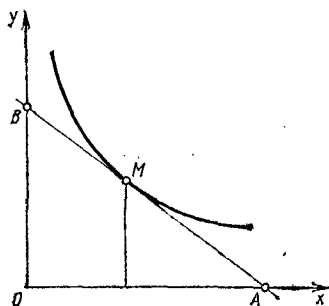


Рис. 47

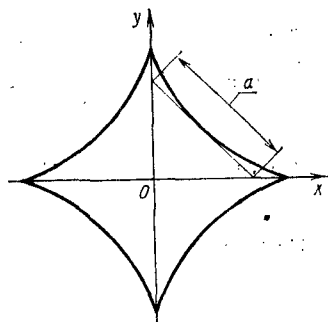


Рис. 48

В задачах 559—567 проинтегрировать уравнение.

559. $2yy' = x(y'^2 + 4).$

560. $y = x(1 + y') + y'^2.$

561. $y = -xy' + y'^2$

562. $2y(y' + 2) = xy'^2.$

563. $y = xy' - y'^2.$

564. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}.$

565. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$

566. $y = x + y'^2 - y'.$

567. $x = y/y' + 1/y'^2.$ (Указание. Это уравнение Клеро относительно x .)

568. Найти кривую, касательные к которой отсекают на осях координат отрезки, составляющие в сумме $2a$.

569. Найти кривую, касательная к которой образует с осями координат треугольник площадью $2a^2$.

570. Найти кривые, у которых произведение расстояний касательных от двух данных точек есть величина постоянная.

571. Доказать, что дискриминантная кривая уравнения Клеро совпадает с дискриминантной кривой семейства интегральных кривых, образующих общее решение этого уравнения.

5. УРАВНЕНИЯ, РАЗРЕШИМЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО y ИЛИ x

Уравнение, разрешимое относительно y . Если уравнение может быть приведено к виду

$$y = \varphi(x, y'), \quad (1)$$

то в некоторых случаях удается найти в квадратурах его общее решение или общее решение в параметрической форме, используя, так же как и в случае уравнения Лагранжа, параметрическое представление уравнения (1) и основное соотношение $dy = y' dx$.

Уравнение (1) допускает *параметрическое представление*:

$$y = \varphi(x, p), \quad y' = p.$$

Пользуясь равенством $dy = y' dx$, получаем дифференциальное уравнение, связывающее p и x :

$$\varphi'_x dx + \varphi'_p dp = p dx.$$

Если это уравнение удастся проинтегрировать в квадратурах, рассматривая в качестве искомой функцию p или x , то, подставляя найденное общее решение $p = \omega(x, C)$ или $x = \theta(p, C)$ в равенство $y = \varphi(x, p)$, получаем соответственно *общее решение уравнения (1)*

$$y = \varphi(x, \omega(x, C))$$

или *общее решение уравнения (1) в параметрической форме*

$$x = \theta(p, C), \quad y = \varphi(\theta(p, C), p).$$

Уравнение, разрешимое относительно x . Уравнение, приводимое к виду

$$x = \varphi(y, y'), \tag{2}$$

допускает *параметрическое представление*

$$x = \varphi(y, p), \quad y' = p.$$

Поэтому равенство $dy = y' dx$ дает

$$dy = p(\varphi'_y dy + \varphi'_p dp).$$

Если это дифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах, то уравнение (2) тоже может быть проинтегрировано в квадратурах.

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$y = y'^2 - xy' + x^2/2. \tag{3}$$

Оно допускает параметрическое представление

$$y = p^2 - xp + x^2/2, \quad y' = p. \tag{4}$$

Пользуясь равенством $dy = y' dx$, получаем $(-p + x) dx + (2p - x) dp = p dx$, откуда

$$(-2p + x) dx + (2p - x) dp = 0$$

или

$$(2p - x)(-dx + dp) = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$-dx + dp = 0 \quad \text{и} \quad 2p - x = 0. \tag{5}$$

Первое из них дает $p=x+C$. Подставляя это значение p в выражение для y (4), получаем

$$y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

Это общее решение уравнения (3).

Из второго уравнения $2p-x=0$ находим $p=x/2$. Подставив это значение p также в выражение для y (4), получим $y=x^2/4$. Это решение уравнения (3), и притом особое.

2. Пусть дано уравнение

$$y'^2 - 4xyy' + 8y^2 = 0. \quad (6)$$

Разрешим его относительно x :

$$x = \frac{y'^2}{4y} + \frac{2y}{y'} \quad (y \neq 0?).$$

Это уравнение допускает параметрическое представление

$$x = \frac{p^3}{4y} + \frac{2y}{p}, \quad y' = p. \quad (7)$$

Пользуясь основным соотношением $dy = y'dx$, получаем

$$dy = p \left(\left(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2} \right) dp + \left(-\frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p} \right) dy \right),$$

откуда

$$\left(\frac{p^2}{2y} - \frac{2y}{p} \right) dp + \left(-\frac{p^3}{4y^2} + 1 \right) dy = 0$$

или

$$\frac{p^3 - 4y^2}{2py} dp + \frac{-p^3 + 4y^2}{4y^2} dy = 0.$$

Вынося слева за скобку общий множитель, имеем

$$\frac{p^3 - 4y^2}{2y} \left(\frac{dp}{p} - \frac{dy}{2y} \right) = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\frac{dp}{p} - \frac{dy}{2y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{p^3 - 4y^2}{2y} = 0. \quad (8)$$

Первое из них дает $p = C_1 \sqrt{y}$ ($y > 0$). Подставляя это значение p в первое из равенств (7), получаем

$$x = \frac{C_1^2}{4} + \frac{2}{C_1} \sqrt{y},$$

откуда

$$y = C(x - C)^2 \quad (C = C_1^2/4). \quad (9)$$

Второе из уравнений (8) дает $p = (4y^2)^{1/3}$. Подставляя это значение p в первое из равенств (7), имеем $y = \frac{4}{27} x^3$. Это решение уравнения (6), и притом особое.

Решение $y=0$ тоже будет особым решением уравнения (6).

Заметим, что оба найденных особых решения являются огибающими семейства интегральных кривых (9).

В задачах 572—575 проинтегрировать уравнение.

$$572. y = xy'/2 + y'^2/x^2.$$

$$573. 6x^2y - 6y'^2 + (-3x^3 + 12x^2)y' - 6x^4 + x^5 = 0.$$

$$574. y = -y'^2/12 + xy'/2 + y'^2/4 + x + x^2/y'^2.$$

$$575. x = (y/y') \ln y - y'^2/y^2.$$

6. ЗАДАЧА О ТРАЕКТОРИЯХ

Задача о траекториях на плоскости в случае декартовых координат. *Изогональной траекторией* семейства кривых

$$\Phi(x, y, \alpha) = 0, \quad (1)$$

где α — параметр семейства, называется кривая L_1 (рис. 49), пересекающая все кривые L этого семейства под одним и тем же постоянным углом α . Если $\alpha = \pi/2$, изогональная траектория называется *ортогональной*.

Изогональные (ортогональные) траектории семейства (1) удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению. Для нахождения его нужно: 1) составить дифференциальное уравнение семейства (1);

2) заменить в полученном уравнении y' на $\frac{y' - k}{1 + ky'}$, если $\alpha \neq$

$\neq \frac{\pi}{2}$ ($k = \operatorname{tg} \alpha$), и на $-\frac{1}{y'}$, если $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Задача о траекториях на плоскости в случае полярных координат. Если семейство кривых задано в полярных координатах

$$\Phi(r, \theta, \alpha) = 0, \quad (2)$$

то для нахождения дифференциального уравнения семейства изогональных (ортогональных) траекторий нужно: 1) составить дифференциальное уравнение семейства (2);

2) заменить в нем $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}$ на $\frac{1 + k(r/\dot{r})}{(r/\dot{r}) - k} \dot{r}$,

если $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ($k = \operatorname{tg} \alpha$), и на $-\dot{r}^2/\dot{r}$,

если $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Примеры. 1. Найти ортогональные траектории семейства окружностей с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (3)$$

Дифференциальным уравнением этого семейства будет

$$x + y y' = 0.$$

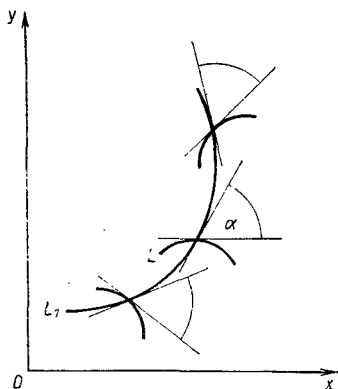


Рис. 49

Вместо y' на $-1/y'$, получим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий

$$x - y/y' = 0 \text{ или } y' = y/x.$$

Интегрируя это уравнение, находим, что искомыми ортогональными траекториями будут полупрямые:

$$y = Cx \quad (x \neq 0), \quad x = 0 \quad (y \neq 0). \quad (4)$$

(Изобразить семейства (3) и (4) на одном рисунке.)

2. Найти ортогональные траектории семейства

$$r = 2a \sin \theta. \quad (5)$$

Найдем сначала дифференциальное уравнение этого семейства:

$$\begin{cases} r = 2a \sin \theta, \\ \dot{r} = 2a \cos \theta. \end{cases}$$

Исключим из этой системы a : $\dot{r} = r \operatorname{ctg} \theta$. Заменим r на $-r^2/\dot{r}$:

$$-r^2/\dot{r} = r \operatorname{ctg} \theta \text{ или } \dot{r}/r = -\operatorname{tg} \theta.$$

Интегрируя это уравнение, найдем искомое семейство ортогональных траекторий:

$$r = 2C \cos \theta. \quad (6)$$

(Изобразить на одном рисунке семейства (5) и (6), перейдя предварительно к декартовым координатам.)

576. Найти ортогональные траектории семейства парабол $y = ax^2$. Сделать рисунок.

577. Найти ортогональные траектории семейства окружностей с центром в точке (a, b) .

578. Найти кривые, пересекающие все полупрямые, выходящие из начала координат, под углом $\pi/4$. Сделать рисунок.

579. Найти кривые, которые пересекают все кривые семейства логарифмических спиралей $r = ae^{\theta}$ под углом $\pi/4$.

580. Найти ортогональные траектории семейства кривых $(x^2 + y^2)^2 - a^2 xy = 0$. (У к а з а н и е. Перейти к полярным координатам.)

581. Найти ортогональные траектории семейства кривых $x^3 + (x - 2a)y^2 = 0$.

582. Доказать, что силовые линии поля, создаваемого силами, имеющими потенциал, являются ортогональными траекториями семейства линий уровня. (Говорят, что силовое поле создано силами F , имеющими потенциал $U = U(x, y)$, если проекции сил на оси координат равны соответствующим частным производным функции U : $F_x = \partial U / \partial x$, $F_y = \partial U / \partial y$, т. е. $F = \operatorname{grad} U$. Линии $U = C$ называются линиями уровня. Линии, касательные к которым совпадают с направлением силы в точке касания, называются силовыми линиями.)

583. Найти силовые линии поля, создаваемого силами, имеющими потенциал $U = x^2 + y^2$.

584. Та же задача для случая $U = x^2/2 + y^2$.

Вопросы

1. Какой вид имеет общее уравнение первого порядка? Когда оно называется уравнением n -й степени?

2. В чем состоит отличие поля направлений, определяемого уравнением, не разрешенным относительно производной, от поля направлений, определяемого уравнением, разрешенным относительно производной? Может ли интегральная кривая иметь излом? Могут ли интегральные кривые пересекаться между собой, касаться друг друга?

3. Как ставится задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной?

4. Что такое частное решение?

5. Какое решение называется особым? Как найти интегральные кривые, подозрительные на особое решение, по самому дифференциальному уравнению? Почему огибающая семейства интегральных кривых будет особым решением? Как еще можно обнаружить кривые, подозрительные на особое решение?

6. Как интегрируются уравнения n -й степени?

7. Какой вид имеет уравнение, квадратное относительно производной? В какой области оно задано? Как найти его общий интеграл? Какие кривые могут быть его особыми решениями?

8. Какой вид имеет общий интеграл уравнения $F(y') = 0$?

9. Как интегрируется уравнение, не содержащее искомой функции?

10. Как интегрируется уравнение, не содержащее независимой переменной?

11. Какой вид имеет уравнение Лагранжа? Как найти его общее решение в параметрической форме? Какие кривые могут быть его особыми решениями?

12. Какой вид имеет уравнение Клеро? Чем оно отличается от уравнения Лагранжа? Как записать его общее решение по виду уравнения? Как найти его особое решение?

13. Как интегрируются уравнения общего вида, разрешимые относительно искомой функции или независимой переменной?

14. Что такое изогональная (ортогональная) траектория семейства кривых? Как получить дифференциальное уравнение изогональных (ортогональных) траекторий данного однопараметрического семейства кривых из дифференциального уравнения этого семейства в случае декартовых и в случае полярных координат?

В задачах 585—600 определить тип уравнения и указать метод его интегрирования.

$$585. y = xy' - \sin y'.$$

$$586. xy'^2 - 2yy' + 4x = 0.$$

$$587. x = e^{y'} - 2y'.$$

$$588. y'^2 - 2xy' = 0.$$

589. $y = xy' + 4y'^2$.
 591. $y = 2xy' + y'^2$.
 593. $y = -x + y'^2 + y'^3$.
 595. $xyy'^2 - (xy + y^2 - x^2)y' - x^2 - xy = 0$.
 596. $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$.
 598. $y = y'^3 - xy' + x^2/2$.
 600. $y = xy' + \sqrt{b^2 + a^2y'^2}$.

590. $y = y' + \sin y' + \cos y'$.
 592. $y'^3 - 4yy' = 0$.
 594. $y'^3 - 1 = 0$.
 597. $xy'^2 - yy' + x = 0$.
 599. $y = xy'^3 + y'^3$.

В задачах 601—611 проинтегрировать уравнение и, где указано, выделить интегральные кривые, проходящие через заданную точку $M(x_0, y_0)$.

601. $y'^3 + 4y = 0$; $M(0, -1)$, $M(1, 0)$.
 602. $y'^3 + 4x = 0$; $M(-1, 1)$, $M(0, 0)$.
 603. $y'^3 - (x + y + y/x)y' + y + y^2/x = 0$; $M(1, 0)$, $M(0, 0)$.
 604. $y'^3 \sqrt{y} y'^2 - x^2 y'^3 + x^2 \sqrt{y} = 0$.
 605. $y'^3 - y'^2 + \cos y' - 1 = 0$.
 607. $y = y'^3 - y'^2 + 1$.
 609. $y = -xy' + y'^{5/2}$.
 611. $y = xy' - 2y'^2$; $M(2, 0)$, $M(0, -2)$, $M(4, 2)$, $M(0, 0)$.

606. $e^{y'} - y'^2 = x$.
 608. $x^2(1 - y') = y'^2$.
 610. $y = -xy' - y'^3$.

В задачах 612—622 найти по виду уравнения кривые, подозрительные на особые решения, и проверить, будут ли они особыми решениями.

612. $y'^3 + y^2 - 1 = 0$.
 614. $y = xy' + 4y'^3$.
 616. $y'^3 - 2xy' + 2x^2 - y = 0$.
 618. $((x - y)^2 - 1)y'^3 - 2y' + (x - y)^2 - 1 = 0$.
 619. $y'^3 - 4yy' = 0$.
 621. $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$.

613. $xy'^3 - 2yy' + 4x = 0$.
 615. $y'^3 - 4xy' + 3x^2 - y^2 = 0$.
 617. $y'^3 - y^3 = 0$.
 620. $y'^3 - 2y'^2 - 4yy' + 8y = 0$.
 622. $x - y = \frac{4}{9}y'^3 - \frac{8}{27}y'^3$.

В задачах 623—631 найти по виду общего интеграла (общего решения) кривые, подозрительные на особое решение, и проверить, будут ли они особыми решениями.

623. $y'^2 = 1 - y^2$; $y = \sin(x + C)$.
 624. $y = a \sqrt{1 + y'^2}$; $y = a \operatorname{sh}((x + C)/a)$.

$$625. y = y'^2 - xy' + x^2/2; y = x^2/2 + Cx + C^2.$$

$$626. xy'^3 - 2yy' + 4x = 0; C^2x^2 - 2Cy + 4 = 0.$$

$$627. ((x-y)^2 - 1)y'^2 - 2y' + (x-y)^2 - 1 = 0; (x-C)^2 + (y-C)^2 = 1.$$

$$628. 4x^2y'^3 - 4xyy' + y^2 - 4x^3 = 0; y^2 = x(x-C)^2.$$

$$629. y'^3 - y^3 = 0; y = 4/(x+C)^2.$$

$$630. y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0; y = C(x-C)^2.$$

$$631. x - y = \frac{4}{9}y'^2 - \frac{8}{27}y'^3; (y-C)^2 = (x-C)^3.$$

III. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Основные понятия и определения. Рассмотрим уравнение n -го порядка, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1)$$

Предполагаем, что функция f определена, однозначна и непрерывна в некоторой области изменения своих аргументов.

Если правая часть уравнения (1) является линейной функцией относительно аргументов $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, то это уравнение называется *линейным*.

Функция $y=y(x)$ называется *решением* уравнения (1) в интервале (a, b) , если она обращает уравнение (1) в тождество, справедливое для всех значений x из этого интервала. При этом предполагается, что функция $y(x)$ имеет в (a, b) непрерывные производные до порядка n включительно и точка $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ принадлежит области задания функции f для всех x из (a, b) . Иногда решение ищут в неявном виде: $\Phi(x, y)=0$ или в параметрической форме: $x=\varphi(t), y=\psi(t)$. График решения называется *интегральной кривой*.

Задача нахождения решения $y=y(x)$, удовлетворяющего *начальным условиям*:

$$y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x = x_0,$$

где $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа (*начальные данные*), называется *задачей Коши (начальной задачей)*.

В случае уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

задача Коши состоит в нахождении решения $y=y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y = y_0, y' = y'_0 \text{ при } x = x_0.$$

Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в этой точке заданную касательную, образующую с положительным направлением оси Ox такой угол α_0 , что $tg\alpha_0 = y'_0$ (рис. 50).

Чтобы дать механическое истолкование задачи Коши, рассмотрим дифференциальное уравнение движения материальной точки единичной массы по оси Ox :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (2)$$

Здесь t — время; $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ — соответственно положение, скорость и ускорение точки в момент времени t ; $f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ — сила, действующая на точку.

Решение $x=x(t)$ уравнения (2) называется *движением*, определяемым этим уравнением. *Задача Коши* для уравнения (2) состоит в том, чтобы найти движение, удовлетворяющее *начальным условиям*:

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{при} \quad t = t_0,$$

где числа t_0, x_0 и v_0 (*начальные данные*) — соответственно начальный момент времени, положение и скорость точки.

Если правая часть уравнения (1) непрерывна в окрестности начальной точки $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$, то задача Коши с начальными данными $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ имеет решение (теорема Пеано).

Чтобы гарантировать не только существование, но и единственность решения задачи Коши, достаточно, согласно теореме Пикара, предположить дополнительно, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию Липшица относительно $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ в некоторой окрестности начальной точки $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$, в частности, что она имеет в этой окрестности ограниченные частные производные по $y, y', \dots, y^{(n-1)}$.

Например, это будет иметь место, если правая часть уравнения (1) является полиномом относительно всех своих аргументов или хотя бы относительно $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ в предположении, что все коэффициенты этого полинома суть непрерывные функции от x . При этом $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ можно задавать совершенно произвольно, а x_0 можно выбирать любым только в первом случае, в то время как во втором случае x_0 должно лежать в интервале непрерывности коэффициентов уравнения.

Наряду с задачей Коши для уравнений высших порядков представляются большой интерес так называемые *граничные (краевые) задачи*, в которых условия, налагаемые на искомое решение, задаются не в одной

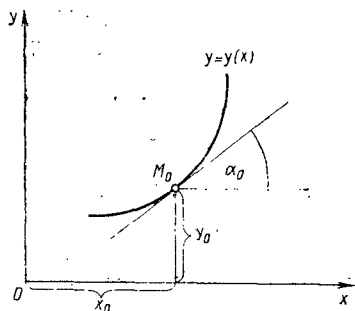


Рис. 50

Это решение будет единственным.

Общее решение

$$y = y(x, x_0, y_0, y'_1, \dots, y_0^{(n-1)}),$$

в котором роль произвольных постоянных играют начальное значение y_0 искомой функции y и начальные значения $y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ производных этой функции при фиксированном значении x_0 независимой переменной x , называется *общим решением в форме Коши*.

Если общее решение уравнения (1) задано в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

то оно называется *общим интегралом* этого уравнения.

Если функция (3), дающая общее решение уравнения (1), задана в параметрическом виде:

$$x = \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad y = \psi(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (7)$$

то представление (7) называется *общим решением уравнения (1) в параметрической форме*.

Если дано n -параметрическое семейство кривых, например в виде (3), то, дифференцируя его n раз по x и исключая из уравнения семейства и полученных n уравнений произвольные постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$, мы имеем, вообще говоря, дифференциальное уравнение n -го порядка, которое называется *дифференциальным уравнением данного семейства кривых*.

Решение уравнения (1) называется *частным*, если в каждой точке его сохраняется единственность решения задачи Коши. Если функция (3) есть общее решение уравнения (1) в области D , то всякое решение, содержащееся в формуле (3) при конкретных (допустимых) числовых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, является частным решением. При этом не исключаются и значения $\pm \infty$.

Если в каждой точке решения нарушается единственность решения задачи Коши, то оно называется *особым*.

Во многих случаях, интегрируя уравнение (1), получают соотношение вида

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-k)}, C_1, \dots, C_k) = 0.$$

Такое соотношение называется *промежуточным интегралом k -го порядка* уравнения (1).

Промежуточный интеграл вида

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C_1) = 0$$

называется *первым интегралом*.

Зная k независимых первых интегралов, можно понизить порядок уравнения на k единиц. Знание n независимых первых интегралов дает возможность путем исключения из них всех производных получить общий интеграл.

Интегрируемость в квадратурах. Уравнение n -го порядка во многих случаях удается проинтегрировать в квадратурах путем предварительного сведения его к уравнению более низкого порядка или с помощью нахождения промежуточных интегралов.

В следующих параграфах рассматриваются (за редким исключением) нелинейные уравнения, допускающие понижение порядка. (Специальные приемы интегрирования линейных уравнений рассматриваются в гл. IV.) Это понижение порядка оказывается возможным вследствие того, что данное уравнение либо является неполным (см. § 2—4), либо, будучи полным, содержит переменные $y, y', \dots, y^{(n)}$ или $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ специальным образом (см. § 5 и 6).

Такого рода понижение порядка оказывается возможным как для уравнения вида (1), так и для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, т. е. для уравнений вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

В § 7 рассматриваются уравнения, для которых всегда можно сразу (или после некоторых простых преобразований) записать первый интеграл, вслед за чем иногда удастся найти промежуточные интегралы более высокого порядка и, наконец, общий интеграл или же довести интегрирование до конца другими способами.

2. УРАВНЕНИЕ, СОДЕРЖАЩЕЕ ТОЛЬКО НЕЗАВИСИМУЮ ПЕРЕМЕННУЮ И ПРОИЗВОДНУЮ ПОРЯДКА n

Уравнение, разрешенное относительно производной порядка n . Рассмотрим сначала *простейшее дифференциальное уравнение n -го порядка*

$$y^{(n)} = f(x). \quad (1)$$

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) . Тогда существует единственное решение задачи Коши, причем начальные данные $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ можно задавать любыми, а x_0 должно принадлежать интервалу (a, b) (почему?). Это решение будет определено во всем интервале (a, b) . Вообще, всякое решение уравнения (1) определено во всем интервале (a, b) и будет частным решением. Особых решений уравнение (1) не имеет.

Интегрируя последовательно уравнение (1), получаем

$$y = \underbrace{\int \int \dots \int}_{n \text{ раз}} f(x) dx dx \dots dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n.$$

Это общее решение уравнения (1) в области

$$a < x < b, |y| < +\infty, |y'| < +\infty, \dots, |y^{(n-1)}| < +\infty. \quad (2)$$

Общее решение можно записать также в форме Коши:

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x}_{n \text{ раз}} f(x) dx dx \dots dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1} + \\ + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!} (x-x_0)^{n-2} + \dots + y_0' (x-x_0) + y_0, \quad (3)$$

где x_0 — фиксированное число из интервала (a, b) , а $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ играют роль произвольных постоянных, которые здесь могут принимать любые значения.

Так как

$$\underbrace{\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x}_{n \text{ раз}} f(x) dx dx \dots dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt$$

(почему?), то общее решение (3) можно переписать в виде

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1} + \\ + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!} (x-x_0)^{n-2} + \dots + y_0' (x-x_0) + y_0. \quad (4)$$

В частности, решением с нулевыми начальными значениями искомой функции и ее производных ($y_0 = y_0' = \dots = y_0^{(n-1)} = 0$) будет

$$Y_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt.$$

Если y_1 — какое-нибудь частное решение уравнения (1), то, положив $y = y_1 + z$, получим для z дифференциальное уравнение $z^{(n)} = 0$, откуда $z = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n$. Поэтому

$$y = y_1 + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n$$

будет общим решением уравнения (1) в области (2). В частности, общее решение уравнения (1) в области (2) имеет вид

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n. \quad (5)$$

Уравнение, не разрешенное относительно производной порядка n . Пусть уравнение задано в виде

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \quad (6)$$

Если его можно разрешить (в элементарных функциях) относительно $y^{(n)}$, мы получим одно или несколько уравнений рассмотренного выше вида. Проинтегрировав все эти уравнения, найдем *общий интеграл* уравнения (6).

Пусть уравнение (6) неразрешимо относительно $y^{(n)}$, но допускает *параметрическое представление*:

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t).$$

В этом случае удастся найти общее решение в параметрической форме. Так как x уже выражено через параметр t , то задача сводится к тому, чтобы выразить y через t . Имеем:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx, \quad dy^{(n-1)} = \psi(t) \varphi'(t) dt,$$

откуда

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C_1 \equiv \psi_1(t, C_1).$$

Аналогично найдем выражение для $y^{(n-2)}$ и т. д. Наконец, для y получим выражение вида

$$y = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

следовательно,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (7)$$

Уравнения (7) будем называть *общим решением* уравнения (6) в параметрической форме.

Примеры. 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' = xe^x \quad (8)$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 1, y' = 0$ при $x = 0$.

Интегрируем последовательно уравнение (8):

$$\left. \begin{aligned} y' &= (x-1)e^x + C_1, \\ y &= (x-2)e^x + C_1x + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Найдем решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям. Подставим начальные данные $x_0=0, y_0=1, y'_0=0$ в систему (9):

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -1 + C_1, \\ 1 &= -2 + C_2, \end{aligned} \right\}$$

получим $C_1 = 1, C_2 = 3$, поэтому искомым решением будет

$$y = (x-2)e^x + x + 3. \quad (10)$$

Если ставить целью только решение задачи Коши, то начальным условиям можно удовлетворять постепенно, в процессе последовательного интегрирования данного уравнения. Интегрируем уравнение (8):

$$y' = (x-1)e^x + C_1.$$

Полагая здесь $x = 0, y' = 0$, находим $C_1 = 1$, откуда

$$y' = (x-1)e^x + 1.$$

Интегрируем еще раз:

$$y = (x-2)e^x + x + C_2.$$

Подставив вместо x и y их начальные значения $x_0=0$, $y_0=1$, найдем $C_2=3$, так что снова получим искомое решение в виде (10). Это же решение можно получить, пользуясь формулой общего решения в форме Коши (4). Положим в ней $n=2$, $x_0=0$, $y_0=1$, $y'_0=0$:

$$y = \int_0^x te^t(x-t) dt + 1.$$

Выполнив интегрирование, вновь получим решение (10).

2. Найти общее решение уравнения

$$y'' = e^{-x^2}.$$

Так как интеграл от правой части не выражается в элементарных функциях, то вместо последовательного интегрирования лучше воспользоваться формулой (5). Полагая в ней $n=2$, $x_0=0$, получаем

$$y = \int_0^x e^{-t^2}(x-t) dt + C_1x + C_2.$$

3. Рассмотрим уравнение

$$y''^3 - 3y'' + 2 = 0. \quad (11)$$

Разрешим его относительно y'' : $y'' = 1$, $y'' = 2$. Интегрируем эти уравнения:

$$y = x^2/2 + C_1x + C_2, \quad y = x^2 + C_1x + C_2.$$

Совокупность этих общих решений образует общий интеграл уравнения (11). Его можно записать в виде одного соотношения

$$(y - x^2/2 - C_1x - C_2)(y - x^2 - C_1x - C_2) = 0.$$

4. Проинтегрировать уравнение

$$x - e^{y''} + y''^2 = 0. \quad (12)$$

Это уравнение неразрешимо относительно y'' . Зато оно разрешимо относительно x : $x = e^{y''} - y''^2$, и потому, приняв y'' за t , получим параметрическое представление уравнения (12) в виде: $x = e^t - t^2$, $y'' = t$. Далее, $dy' = y''dx$, $dy' = t(e^t - 2t)dt$, откуда

$$y' = \int t(e^t - 2t) dt + C_1 = e^t(t-1) - \frac{2}{3}t^3 + C_1.$$

Поэтому

$$dy = y' dx = \left(e^t(t-1) - \frac{2}{3}t^3 + C_1 \right) (e^t - 2t) dt$$

или

$$dy = \left(e^{2t}(t-1) - \left(\frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - 2t - C_1 \right) e^t + \frac{4}{3}t^4 - 2C_1t \right) dt.$$

Интегрируя, находим

$$y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right) e^2 - \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t + 2 - C_1 \right) e^t + \frac{4}{15}t^5 - C_1t^2 + C_2.$$

8*

Присоединяя сюда равенство $x = e^t - t^2$, получаем общее решение уравнения (12) в параметрической форме.

В задачах 632 — 641 проинтегрировать уравнение.

$$632. y''' = -\cos x. \quad 633. y''' = 2/x^3. \quad 634. y'' = \sin x^2.$$

$$635. y'' = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3}. \quad 636. y'' = e^x + \frac{3}{4} x^{-5/2}.$$

$$637. y''' = \frac{\sin x}{x}. \quad 638. x - \sin y'' + 2y'' = 0. \quad 639. x = e^{-y''} + y''.$$

$$640. x = y'' / \sqrt{1 + y''^2}. \quad 641. y''^4 - 1 = 0.$$

В задачах 642 — 646 найти решения, удовлетворяющие поставленным начальным или граничным условиям.

642. $y'' = 1$; $y = y_0$, $y' = y'_0$ при $x = x_0$; $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$; $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 0$; $y = 0$, $y' = -1$ при $x = 0$; $y = 0$ при $x = 1$, $y = 1$ при $x = 2$. Сделать рисунки.

643. $y'' = 2$; $y = 0$ при $x = -1$, $y = 0$ при $x = 1$. Сделать рисунок.

644. $y'' = -6x$; $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$. Сделать рисунок.

645. $y''' = e^{-x}$; $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$ при $x = 0$.

646. $y''' = e^x/x$; $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$ при $x = 1$.

3. УРАВНЕНИЕ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЕ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ, И УРАВНЕНИЕ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЕ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Общие понятия. Уравнение вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \leq k < n) \quad (1)$$

с помощью подстановки

$$y^{(k)} = z, \quad (2)$$

где z — новая неизвестная функция, приводится к уравнению $(n-k)$ -го порядка

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0. \quad (3)$$

Если уравнение (3) интегрируется в квадратурах так, что мы найдем

$$z = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \quad \text{или} \quad \Phi(x, z, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0,$$

то, возвращаясь к переменной y , получим соответственно

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k}) \quad \text{или} \quad \Phi(x, y^{(k)}, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0.$$

Это уравнения рассмотренного выше вида (см. § 2). Интегрирование каждого из них введет k новых произвольных постоянных.

В результате получим семейство интегральных кривых, зависящее от n произвольных постоянных, которое будем называть *общим решением* (*общим интегралом*) уравнения (1).

Если уравнение (3) имеет особые решения, то, подставляя их в формулу (2) и интегрируя полученные уравнения, находим особые решения уравнения (1). В частности, изложенным выше методом понижения порядка всегда может быть проинтегрировано в квадратурах линейное уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} = f(x),$$

ибо, полагая $y^{(n-1)} = z$, мы придем к линейному уравнению первого порядка

$$z' + p_1(x)z = f(x).$$

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$y' = xy'' + y''^2. \quad (4)$$

Полагая $y' = z$, получаем

$$z = xz' + z'^2.$$

Это уравнение Клеро. Оно имеет общее решение

$$z = xC_1 + C_1^2 \quad (5)$$

и особое решение

$$z = -x^2/4. \quad (6)$$

Возвращаемся в формуле (5) к переменной y :

$$y' = xC_1 + C_1^2.$$

Проинтегрировав, получим

$$y = \frac{C_1}{2} x^2 + C_1^2 x + C_2.$$

Это общее решение уравнения (4).

Заменим в формуле (6) z на y' :

$$y' = -x^2/4, \quad (7)$$

откуда

$$y = -x^3/12 + C.$$

Каждое из решений, входящих в это семейство, является особым решением уравнения (4).

Возможность существования этих особых решений легко установить непосредственно по виду уравнения (4). Действительно, разрешаем это уравнение относительно старшей производной:

$$y'' = -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + y'} \equiv f_1,$$

$$y'' = -\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} + y'} \equiv f_2.$$

Здесь $\partial f_1 / \partial y'$ и $\partial f_2 / \partial y'$ обращаются в бесконечность, если $y' = -x^2/4$, т. е. выполняется равенство (7).

2. Пусть дано уравнение

$$y''' = -\frac{1}{2} y''^3. \quad (8)$$

Положив $y'' = z$, получим $z' = -\frac{1}{2} z^3$, откуда $z^2 = 1/(x + C_1)$. Заменим z на y'' :

$$y''^3 = 1/(x + C_1).$$

Это уравнение, содержащее только x и y'' , но не разрешенное относительно y'' (см. § 2). Интегрируем его:

$$y = \pm \frac{4}{3} (x + C_1)^{3/2} + C_2 x + C_3.$$

Особых решений нет. Их и не могло быть, ибо правая часть уравнения (8) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения во всей области задания этого уравнения.

3. Найти решения уравнения

$$y''^3 = 4(y' - 1), \quad (9)$$

удовлетворяющие начальным условиям: а) $y=0$, $y'=2$ при $x=0$; б) $y=0$, $y'=1$ при $x=0$.

Интегрируем уравнение (9):

$$y' = z, \quad z'^3 = 4(z - 1), \quad z' = \pm 2\sqrt{z-1},$$

$$\frac{dz}{\pm 2\sqrt{z-1}} = dx \quad (\sqrt{z-1} = 0?), \quad \pm \sqrt{z-1} = x + C_1.$$

$$z = 1 + (x + C_1)^2, \quad y' = 1 + (x + C_1)^2,$$

$$y = x + \frac{1}{3} (x + C_1)^3 + C_2;$$

$$\sqrt{z-1} = 0, \quad z = 1, \quad y' = 1, \quad y = x + C.$$

Следовательно, уравнение (9) имеет общее решение

$$y = x + \frac{1}{3} (x + C_1)^3 + C_2 \quad (10)$$

и семейство особых решений

$$y = x + C. \quad (11)$$

Найдем решения поставленных задач Коши:

а) воспользуемся общим решением (10). Имеем

$$\left. \begin{aligned} y &= x + \frac{1}{3} (x + C_1)^3 + C_2, \\ y' &= 1 + (x + C_1)^2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Полагая здесь $x = 0$, $y = 0$, $y' = 2$, получаем

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{3} C_1^3 + C_2, \\ 2 &= 1 + C_1^2, \end{aligned} \right\}$$

откуда $C_1 = \pm 1$, $C_2 = \mp 1/3$. Подставив эти значения C_1 и C_2 в систему (12), найдем два решения:

$$y = x + \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{3}, \quad y = x + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{3}.$$

Других решений нет, так как ни одно из особых решений (11) не удовлетворяет рассматриваемым начальным условиям (почему?);

б) подставив в систему (12) начальные данные $x_0=0$, $y_0=0$, $y'_0=1$, получим

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{3} C_1^3 + C_2, \\ 1 &= 1 + C_1^2, \end{aligned} \right\}$$

откуда $C_1=0$, $C_2=0$. Подставив эти значения C_1 и C_2 в формулу (10), найдем решение

$$y = x + \frac{1}{3} x^3.$$

Посмотрим, нет ли среди особых решений (11) такого, которое удовлетворяло бы рассматриваемым начальным условиям. Очевидно, что таким решением будет $y=x$.

Полученные в случаях «а» и «б» результаты вполне согласуются с общей теорией. В самом деле, разрешив уравнение (9) относительно y' , мы получим два уравнения:

$$y'' = 2\sqrt{y'-1}, \quad y'' = -2\sqrt{y'-1}.$$

В случае «а» для каждого из этих уравнений в окрестности начальной точки (0, 0, 2) выполняются условия теоремы существования и единственности решения, а в случае «б» эти условия не выполняются ни в какой окрестности начальной точки (0, 0, 1), ибо производные от правых частей по y' обращаются в бесконечность при $y'=1$.

4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2xy' = 0 \tag{13}$$

и выделить решения, удовлетворяющие начальным условиям: а) $y=0$, $y'=0$ при $x=0$; б) $y=0$, $y'=1$ при $x=0$.

Полагая $y'=z$, получаем $z' + 2xz = 0$, откуда $z = C_1 e^{-x^2}$. Заменяем z на y' : $y' = C_1 e^{-x^2}$. Следовательно,

$$y = C_1 \int e^{-x^2} dx + C_2 \tag{14}$$

будет общим решением уравнения (13).

Так как интеграл от e^{-x^2} не выражается через элементарные функции, то для нахождения решений, удовлетворяющих поставленным начальным условиям, перепишем общее решение (14) (заменив $\int e^{-x^2} dx$ на $\int_0^x e^{-x^2} dx$ и выразив C_1 и C_2 через начальные значения y и y' при $x=0$) в форме Коши:

$$y = y'_0 \int_0^x e^{-x^2} dx + y_0.$$

Подставив сюда начальные данные, получим, что искомыми решениями будут со-

ответственно: а) $y=0$, б) $y = \int_0^x e^{-x^2} dx$.

В задачах 647 — 651 проинтегрировать уравнение.

647. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$. 648. $xy'' = y' \ln(y'/x)$.

649. $xy'' - y' = 0$.

650. $y'(1 + y'^2) = ay''$.

651. $x \ln x \cdot y'' - y' = 0$.

В задачах 652—655 найти решение уравнения, удовлетворяющее поставленным начальным условиям, исследовав предварительно вопрос о существовании и единственности искомого решения.

652. $y'' = (1 + y'^2)^{3/2}$; $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

653. $y''^2 = y'$; $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 0$; $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$.

654. $4y' + y''^2 = 4xy''$; $y = 0$, $y' = -1$ при $x = 0$; $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$.

655. $2xy'' + y''' = 0$; $y = y_0$, $y' = y'_0$, $y'' = y''_0$ при $x = 0$.

В задачах 656, 657 составить дифференциальное уравнение заданного семейства кривых. Выяснить, какое характерное свойство кривых заданного семейства оно выражает.

656. $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = R^2$ ($R = \text{const}$).

657. $x^2 + y^2 + C_1x + C_2y + C_3 = 0$.

4. УРАВНЕНИЕ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЕ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Общие понятия. Уравнение вида

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

допускает понижение порядка на единицу, если ввести вместо y новую искомую функцию z по формуле

$$y' = z$$

и принять y за новую независимую переменную: $z = z(y)$. При этом y'' , y''' , ..., $y^{(n)}$ преобразуются так:

$$\left. \begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z, \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} z = \left(\frac{d^2z}{dy^2} z + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right) z, \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n)} &= \omega \left(z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}} \right). \end{aligned} \right\}$$

Подставляя выражения для y' , y'' , ..., $y^{(n)}$ в уравнение (1), получаем уравнение $(n-1)$ -го порядка с искомой функцией z от независимой переменной y .

Принимая y за независимую переменную, мы могли потерять решение вида $y = \text{const}$. Непосредственной подстановкой $y = b$ в уравнение (1) можно выяснить, имеет ли оно решения такого вида.

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение вида

$$y'' = f(y). \quad (2)$$

Полагая $y' = z$ и принимая y за новую независимую переменную, получаем $y'' = \frac{dz}{dy} z$. Поэтому уравнение (2) примет вид:

$$\frac{dz}{dy} z = f(y) \text{ или } z dz = f(y) dy.$$

Интегрируем это уравнение:

$$z^2 = 2 \int f(y) dy + C_1.$$

Заменим z на y' :

$$y'^2 = 2 \int f(y) dy + C_1.$$

Дальнейшее интегрирование дает

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + C_1}} = \pm x + C_2. \quad (3)$$

2. Пусть дано уравнение

$$y'' = \frac{3}{2} y^3.$$

Это уравнение вида (2). Пользуясь формулой (3), мы сразу получаем его общий интеграл

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^3 + C_1}} = \pm x + C_2.$$

3. Проинтегрировать уравнение

$$2yy'' = y'^2 + y^2. \quad (4)$$

Положив $y' = z$ и приняв y за новую независимую переменную, получим $y'' = (dz/dy) z$. Тогда уравнение (4) можно записать в виде

$$2y \frac{dz}{dy} z = z^2 + y^2.$$

Полагаем $z^2 = u$:

$$y \frac{du}{dy} = u + y^2 \text{ или } \frac{du}{dy} = \frac{1}{y} u + y \quad (y \neq 0).$$

Интегрируем это уравнение: $u = C_1 y + y^2$. Следовательно, $z^2 = C_1 y + y^2$, $y'^2 = C_1 y + y^2$, откуда

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 y + y^2}} = \pm dx.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln |y + C_1/2 + \sqrt{C_1 y + y^2}| = \pm x + C_2.$$

Функция $y=0$ будет решением. Это решение частное.

4. (Задача о погоне.) Пусть точка P движется по оси Ox (рис. 51) с постоянной скоростью $v > 0$, а точка M — по некоторой кривой L в плоскости (x, y) с постоянной скоростью u ($u > v$), причем вектор скорости точки M в каждый момент времени направлен в точку P . Кривая L называется *линией погони*. Предположив, что в начальный момент времени точка P находится в начале координат, а точка M — на оси Oy в точке $M_0(0, y_0)$, $y_0 > 0$; найти уравнение кривой погони L , точку $C(x_1, 0)$, в которой точка M догонит точку P , и продолжительность погони T .

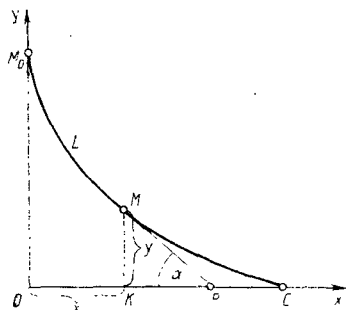


Рис. 51

Составим дифференциальное уравнение линии погони. Так как

$$\operatorname{tg} \alpha = -y' \text{ и } \operatorname{tg} \alpha = \frac{|KM|}{|KP|} = \frac{y}{vt - x},$$

то $y' = y(x - vt)$, откуда

$$t = (xy' - y)/(vy').$$

Дифференцируя обе части последнего выражения по x , находим

$$\frac{dt}{dx} = \frac{yy''}{vy'^2}. \quad (5)$$

С другой стороны,

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{dt},$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{u}, \quad (6)$$

откуда

Приравнявая выражения (5) и (6), получаем дифференциальное уравнение линии погони:

$$\frac{yy''}{vy'^2} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{u}$$

или

$$yy'' = ky'^2 \sqrt{1+y'^2} \quad (k = v/u < 1).$$

Нам нужно найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = y_0, \quad y' \rightarrow -\infty \text{ при } x \rightarrow +0 \quad (7)$$

(почему?).

Положив $y' = z$, $z = z(y)$, получим уравнение

$$yz \frac{dz}{dy} = kz^2 \sqrt{1+z^2}. \quad (8)$$

Согласно начальным условиям (7), нам нужно найти решение этого уравнения $z = z(y)$, обладающее свойством

$$z \rightarrow -\infty \text{ при } y \rightarrow y_0. \quad (9)$$

Деля обе части уравнения (8) на z (при этом мы не теряем решений задачи (почему?)), разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\int \frac{dz}{z \sqrt{1+z^2}} = k \ln y + \ln |C_0| \quad (y > 0).$$

Так как $z < 0$ (почему?), то

$$\int \frac{dz}{z \sqrt{1+z^2}} = \int \frac{d(1/z)}{\sqrt{1+(1/z)^2}}.$$

Поэтому

$$\ln \left(\frac{1}{z} + \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}} \right) = k \ln y + \ln |C_0|$$

или

$$\frac{1}{z} + \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}} = C_1 y^k \quad (C_1 = |C_0|).$$

Выберем C_1 так, чтобы удовлетворить условию (9). Для этого достаточно положить $C_1 = 1/y_0^k$. Получим

$$\frac{1}{z} + \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}} = \left(\frac{y}{y_0} \right)^k.$$

Разрешая это уравнение относительно $1/z$, находим*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{y}{y_0} \right)^k - \left(\frac{y}{y_0} \right)^{-k} \right),$$

откуда

$$dx = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{y}{y_0} \right)^k - \left(\frac{y}{y_0} \right)^{-k} \right) dy. \quad (10)$$

Остается проинтегрировать уравнение (10) с учетом начального условия

$$x = 0 \text{ при } y = y_0 \quad (11)$$

(почему?). Интегрируя уравнение (10), находим

$$x = \frac{y_0}{2} \left(\frac{1}{k+1} \left(\frac{y}{y_0} \right)^{k+1} - \frac{1}{1-k} \left(\frac{y}{y_0} \right)^{1-k} \right) + C_2.$$

Чтобы удовлетворить начальному условию (11), нужно взять $C_2 = y_0 k / (1-k^2)$, и мы получим уравнение линии погони L в виде

$$x = \frac{y_0}{2} \left(\frac{1}{k+1} \left(\frac{y}{y_0} \right)^{k+1} - \frac{1}{1-k} \left(\frac{y}{y_0} \right)^{1-k} \right) + \frac{y_0 k}{1-k^2}. \quad (12)$$

Найдем теперь абсциссу точки C . Для этого достаточно положить в уравнении (12) $y = 0$. Получим

$$x_1 = y_0 k / (1-k^2) \quad \text{или} \quad x_1 = y_0 u v / (u^2 - v^2).$$

Продолжительность погони

$$T = y_0 u / (u^2 - v^2).$$

В задачах 658—661 проинтегрировать уравнение.

* Если $\alpha + \sqrt{1+\alpha^2} = \beta$, то $\frac{1}{\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}} = \beta^{-1}$, откуда $\alpha - \sqrt{1+\alpha^2} = -\beta^{-1}$. Поэтому $2\alpha = \beta - \beta^{-1}$, откуда $\alpha = \frac{1}{2} (\beta + \beta^{-1})$.

$$658. yy'' = y'^2. \quad 659. yy''^2 = 1.$$

$$660. 1 + y'^2 = 2yy''. \quad 661. 2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0.$$

662. Найти решение уравнения $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 1, y' = 0$ при $x = 0$, доказав предварительно, что искомое решение существует и единственно.

$$663. 3y'y'' = e^y; y = 0, y' = 1 \text{ при } x = -3.$$

664. Найти интегральную кривую уравнения $yy'' + y'^2 = 1$, проходящую через точку $(0, 1)$ и касающуюся в этой точке прямой $x + y = 1$. (Почему получается одна интегральная кривая?)

665. Найти интегральную кривую уравнения $yy'y'' = y'^2 + y''^2$, касающуюся в начале координат прямой $x + y = 0$. (Почему получаются две интегральные кривые?)

666. Найти плоские кривые, радиус кривизны которых пропорционален длине отрезка нормали. Рассмотреть случаи, когда коэффициент пропорциональности k равен числам ± 1 и ± 2 . Сделать рисунки. (Указание. Воспользоваться формулой длины отрезка нормали (см. задачу 137) и формулой радиуса кривизны $R = (1 + y'^2)^{3/2} / y''$.)

667. Найти плоские кривые, радиус кривизны которых пропорционален кубу длины отрезка нормали.

668. Найти форму равновесия однородной нерастяжимой нити под действием ее веса (цепная линия).

5. УРАВНЕНИЕ, ОДНОРОДНОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Общие понятия. Уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

однородное относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$, допускает понижение порядка на единицу, если положить

$$y' = yz, \quad (2)$$

где z — новая неизвестная функция: $z = z(x)$.

Действительно, найдем выражения для $y'', y''', \dots, y^{(n)}$. Дифференцируем последовательно формулу (2) и заменяем каждый раз y' на yz :

$$\left. \begin{aligned} y'' &= y'z + yz' = y(z^2 + z'), \\ y''' &= y(z^3 + 3zz' + z''), \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n)} &= y\omega(z, z', \dots, z^{(n-1)}). \end{aligned} \right\}$$

Подставим выражения для $y', y'', \dots, y^{(n)}$ в уравнение (1):

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), \dots, y\omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Это уравнение вследствие предположенной однородности функции F можно записать так:

$$y^m F(x, 1, z, z^2 + z', \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Целя на y^m (при этом, как это видно из дальнейшего, потери решения $y = 0$ не происходит), получаем

$$F(x, 1, z, z^2 + z', \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Это уравнение $(n-1)$ -го порядка. Если мы найдем его общее решение

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}),$$

то, заменив z на y'/y , получим

$$y'/y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}).$$

Интегрируя еще раз, имеем

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) dx}.$$

Это общее решение уравнения (1).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$xyy'' - x{y'}^2 - yy' = 0. \quad (3)$$

Полагая $y' = yz$, имеем $y'' = y(z^2 + z')$. Подставляя выражения для y' и y'' в уравнение (3) и сокращая на y^2 , получаем

$$x(z^2 + z') - xz^2 - z = 0$$

или $xz' - z = 0$. Интегрируем последнее уравнение: $z = C_1 x$. Заменим z на y'/y : $y'/y = C_1 x$. Интегрируя еще раз, получаем

$$y = C_2 e^{(C_1/2)x^2} \quad \text{или} \quad y = Be^{Ax^2} \quad (A = C_1/2, B = C_2).$$

В задачах 669—672 проинтегрировать уравнение.

669. $xyy'' - xy'^2 - yy' - bxy'^2/\sqrt{a^2 - x^2} = 0.$

670. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2y'^2 + y^2}.$

671. $x^2yy'' = (y - xy')^2.$ 672. $yy'' - y'^2 = yy'/\sqrt{1+x^2}.$

6. ОБОБЩЕННОЕ ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Общие понятия. Уравнение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

называется **обобщенным однородным** (см. § 6, гл. I), если существует такое число k , при котором левая часть этого уравнения становится однородной функцией некоторой степени m относительно всех аргументов в предположении, что $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ считаются величинами соответственно 1-, k -, $(k-1)$ -, ..., $(k-n)$ -го измерений. Если в уравнении (1) положить

$$x = e^t, \quad y = ze^{kt}, \quad (2)$$

Положим здесь $\frac{dz}{dt} = u$ и примем z за независимую переменную. Тогда $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{du}{dz} u$. Поэтому уравнение (5) переписывается так:

$$\frac{du}{dz} u + u + u^3 = 0$$

или (после сокращения на u)

$$\frac{du}{dz} + 1 + u^2 = 0. \quad (6)$$

Интегрируем уравнение (6): $u = \operatorname{tg}(C_1 - z)$. Заменяем u на dz/dt :

$$\frac{dz}{dt} = \operatorname{tg}(C_1 - z) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{-\operatorname{tg}(z - C_1)} = dt.$$

Проинтегрировав еще раз, получим

$$\ln |\sin(z - C_1)| + t = \ln |C_2|.$$

Возвращаясь к переменным x и y по формулам $t = \ln x$, $z = y/x$, находим общий интеграл уравнения (4) в виде

$$\ln |\sin(y/x - C_1)| + \ln x = \ln |C_2|$$

или

$$y = x(A + \arcsin(B/x)) \quad (A = C_1, B = \pm C_2).$$

В задачах 673—675 проинтегрировать уравнение.

673. $xyy'' + yy' - x^2y'^2 = 0$.

674. $x^4y'' - x^3y'^2 + 2x^2yy'' - (3xy^2 + 2x^3)y' + 2x^2y + y^3 = 0$.

675. $x^2y'' - 3xy' + 4y + x^2 = 0$.

7. УРАВНЕНИЕ, ЛЕВАЯ ЧАСТЬ КОТОРОГО ЕСТЬ ТОЧНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Общие понятия. Если в уравнении

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

левая часть является точной производной от некоторой функции $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, т. е.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

то

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C_1 \quad (2)$$

будет *первым интегралом* уравнения (1). Может случиться, что уравнение (2) в свою очередь является уравнением в точных производных. Тогда мы найдем *второй интеграл* уравнения (1).

Если уравнение (1) не является уравнением в точных производных, то нужно попытаться подобрать такую функцию $\mu = \mu(x, y,$

$y', \dots, y^{(n-1)}$) — интегрирующий множитель уравнения (1), чтобы после умножения на нее уравнение (1) стало уравнением в точных производных.

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1+y^2} = 0. \quad (3)$$

Так как в левой части у каждой из дробей в числителе стоит производная от знаменателя, то мы имеем

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1+y^2} = (\ln |y'| - \ln(1+y^2))',$$

т. е. уравнение (3) является уравнением в точных производных. Оно имеет первый интеграл

$$\ln |y'| - \ln(1+y^2) = \ln |C_1|$$

или

$$y' = A(1+y^2) \quad (A = \pm C_1). \quad (4)$$

Интегрируя уравнение (4), находим

$$\operatorname{arctg} y = Ax + B.$$

Это общий интеграл уравнения (3).

2. Проинтегрировать уравнение

$$yy'' = y'^2.$$

Это уравнение не является уравнением в точных производных, но, умножив обе его части на функцию $\mu = 1/(yy')$, получим уравнение в точных производных

$$y''/y' = y'/y.$$

Его первым интегралом будет $y' = C_1 y$, откуда

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

3. Пусть дано уравнение

$$y'' = f(y).$$

Умножим обе его части на $\mu = 2y'$: $2y'y'' = 2f(y)y'$ или

$$(y'^2)'_x = (2 \int f(y) dy)'_x,$$

откуда

$$y'^2 = 2 \int f(y) dy + C_1.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + C_1}} = \pm x + C_2.$$

(Ср. § 4, пример 1.)

4. Линейное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

будет уравнением в точных производных тогда и только тогда, когда $q(x) = p'(x)$, т. е. если оно имеет вид

$$y'' + p(x)y' + p'(x)y = f(x).$$

В этом случае можно найти (в квадратурах) его общее решение:

$$\begin{aligned} (y')' + p(x)y' &= \left(\int f(x) dx \right)', \\ y' + p(x)y &= \int f(x) dx + C_1, \end{aligned}$$

ткуда

$$y = e^{-\int p(x) dx} (C_2 + \int \left(\int f(x) dx + C_1 \right) e^{\int p(x) dx} dx).$$

В задачах 676—683 проинтегрировать уравнение.

676. $y'' - 2yy'.$

677. $y'' = y'^2 y.$

678. $yy'' = y'.$

679. $yy''' - y'y'' = 0.$

680. $y'' = (1 + y'^2)^{3/2}.$

681. $(1 + y'^2)y''' - 3y'y'' = 0.$

682. $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1.$

683. $y'' + \cos x \cdot y' - \sin x \cdot y = 0.$

684. Найти общий интеграл уравнения $y'y''' - 3y''^2 = 0$ и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y=0$, $y'=1$, $y''=0$ при $x=0$.

685. Найти общий интеграл уравнения $2y'^2 = (y-1)y''$ и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y=2$, $y'=0$ при $x=1$, доказав предварительно, что искомое решение существует и единственно.

686. Найти первый интеграл уравнения $(y''-2x)y-2(y'-x^2)y'=0$ и решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y=1/3$, $y'=1$ при $x=1$.

687. Найти второй интеграл уравнения $y''' = yy'' + y'^2$ и решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y=0$, $y'=1/2$, $y''=0$ при $x=0$, доказав предварительно, что искомое решение существует и единственно.

8. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вопросы

1. Какой общий вид имеет уравнение n -го порядка, разрешенное относительно $y^{(n)}$? Когда это уравнение называется линейным? Что называется решением (интегральной кривой) такого уравнения? В каких формах оно может быть задано?

2. Как ставится задача Коши для уравнения n -го порядка, разрешенного относительно $y^{(n)}$? Какой геометрический и механический смысл имеет эта задача для уравнения второго порядка? Означает ли в этом случае единственность решения задачи Коши, что через заданную точку (x_0, y_0) проходит только одна интегральная кривая?

3. При каком условии задача Коши имеет решение? Когда это решение будет заведомо единственным?

4. Что такое краевая задача? Чем она отличается от задачи Коши?

5. Что такое общее решение? Как решается задача Коши при помощи формулы общего решения? Что называется общим решением в форме Коши? Что такое общий интеграл? Что такое общее решение в параметрической форме?

6. Какое решение называется частным; особым? В каком случае уравнение заведомо не имеет особых решений?

7. Что такое промежуточный интеграл k -го порядка? Какой промежуточный интеграл называется первым интегралом?

8. Какой вид имеет общее решение уравнения $y^{(n)} = f(x)$?

9. Как найти общее решение уравнения $F(x, y^{(n)}) = 0$ в параметрической форме в случае, когда это уравнение допускает параметрическое представление в элементарных функциях?

10. Какой подстановкой понижается порядок уравнения, не содержащего искомой функции, и уравнения, не содержащего искомой функции и последовательных первых производных?

11. Как понижается порядок уравнения, не содержащего независимой переменной?

12. Какой подстановкой понижается порядок уравнения, однородного относительно искомой функции и ее производных?

13. Какое уравнение называется обобщенным однородным? Как понижается порядок этого уравнения?

14. Какое уравнение называется уравнением в точных производных? Какой вид имеет первый интеграл этого уравнения? Что такое интегрирующий множитель?

Задачи

В задачах 688, 689 доказать, пользуясь теоремой Пикара, существование и единственность решения, удовлетворяющего поставленным начальным условиям; оценить область существования решения.

688. $y'' = y' + y^2 - x$; $|x| \leq 1$, $|y| \leq 2$, $|y'| \leq 1$; $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 0$.

689. $y'' = x^2 + y - y'^2$; $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|y'| \leq 2$; $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$.

В задачах 690, 691 доказать, пользуясь теоремой Коши, существование и единственность голоморфного решения, удовлетворяющего поставленным начальным условиям; оценить область сходимости степенного ряда, представляющего решение, найти свободный член и коэффициенты при $x - x_0$, $(x - x_0)^2$ и $(x - x_0)^3$ в разложении решения в ряд по степеням $x - x_0$.

690. $y'' = y^2 + x$; $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|y'| \leq 1$; $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$.

691. $y'' = \frac{2}{2-x} y^2$; $|x| \leq 1$, $|y| \leq 2$, $|y'| \leq 1$; $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 1$.

В задачах 692, 693 найти голоморфное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

$$692. y'' = y'^2 - yy' + e^x; y = 1, y' = 1 \text{ при } x = 0.$$

$$693. y'' = y'^2 + y^2 - \sin x - 1; y = 0, y' = 1 \text{ при } x = 0.$$

В задачах 694—705 определить тип уравнения и указать метод его интегрирования или понижения порядка.

$$694. y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 2. \quad 695. y''' = x^2.$$

$$696. y' + y'^2 = xy''. \quad 697. ey'' + y'' - x = 0.$$

$$698. xyy'' + xy'^2 - yy' = 0. \quad 699. yy'' = \varphi(y').$$

$$700. y'' = \frac{1}{4 \sqrt{y}}. \quad 701. \frac{y'''}{y''} - \frac{3y'y''}{1 + y'^2} = 0.$$

$$702. (1 + y^2) yy'' = (3y^2 - 1) y'^2.$$

$$703. x^4 y'' - (x^3 + 2xy) y' + 4y^2 = 0.$$

$$704. xy'' - y' = x \sin x. \quad 705. y'' + xy' + y = 0.$$

В задачах 706—718 проинтегрировать уравнение и, где указано, выделить решения, удовлетворяющие начальным данным, исследовав предварительно вопрос о существовании и единственности искомых решений.

$$706. y'' = 6x + 2; x_0 = 0, y_0 = 0, y'_0 = 0.$$

$$707. y'' = e^{-x}/x, x_0 = 1, y_0 = 0, y'_0 = 0.$$

$$708. y'^2 - 2y'' = 0; x_0 = 1, y_0 = 2, y'_0 = 1.$$

$$709. x = e^{y''} - y''. \quad 710. xy''' - y'' = 0.$$

$$711. y'' = 2\sqrt{y'}; x_0 = 0, y_0 = 1, y'_0 = 1; x_0 = 0, y_0 = 0, y'_0 = 0.$$

$$712. y' = xy'' - \frac{1}{2} y'^2; x_0 = 1, y_0 = 0, y'_0 = \frac{1}{2}.$$

$$713. yy'' = y'^2 - y^2 \ln y; x_0 = 0, y_0 = 1, y'_0 = 1.$$

$$714. x(y''y - y'^2) = yy' + xy^2. \quad 715. x^3 y'' = (y - xy')^2.$$

$$716. \frac{y''}{y'} + e^{y'} y'' = 1. \quad 717. y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{2}{x^2} y = 3x^2.$$

$$718. y'' + 2xy' + 2y = 1; x_0 = 0, y_0 = 0, y'_0 = 0.$$

В задачах 719, 720 найти решения, удовлетворяющие заданным краевым условиям.

$$719. y'' = -6x; y = 0 \text{ при } x = 0, y = -1 \text{ при } x = 1.$$

$$720. y'' = \frac{1}{x} y' - x = 0; y \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0, y = \frac{1}{3} \text{ при } x = 1.$$

IV. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Однородное уравнение. *Линейным уравнением n -го порядка* называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x). \quad (1)$$

Если при всех рассматриваемых значениях x функция $f(x)$ равна нулю, то это уравнение называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Предполагаем, что коэффициенты $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ и свободный член $f(x)$ определены и непрерывны в интервале (a, b) . Тогда уравнение (1) имеет единственное решение $y = y(x)$, определенное во всем интервале (a, b) и удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при } x = x_0,$$

причем начальные данные $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ можно задавать совершенно произвольно, а x_0 нужно брать из интервала (a, b) (почему?).

Всякое решение линейного уравнения является частным решением, так что *особых решений оно не имеет* (почему?).

Интегрирование неоднородного уравнения (1), как будет доказано ниже, приводится к интегрированию однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0. \quad (2)$$

Однородное линейное уравнение всегда имеет *нулевое* решение $y = 0$. Оно удовлетворяет *нулевым* начальным условиям

$$y = 0, \quad y' = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = 0 \quad \text{при } x = x_0,$$

причем других решений, с такими же начальными условиями, нет (почему?).

Для построения общего решения однородного уравнения достаточно знать n линейно независимых в интервале (a, b) (и тем самым ненулевых) частных решений $y_1, y_2, \dots, y_n$, т. е. таких решений, для которых тождество

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \quad (a < x < b),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — постоянные числа, может выполняться только в очевидном случае $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$. Такая система решений называется *фундаментальной*. Чтобы система решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы ее *определитель Вронского (вронскиан)*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & \cdot & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdot & \cdot & \cdot & y'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^{(n-1)}_1 & y^{(n-1)}_2 & \cdot & \cdot & \cdot & y^{(n-1)}_n \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке из интервала (a, b) . (В действительности, в этом случае определитель Вронского отличен от нуля во всех точках интервала (a, b) .)

При сделанных выше предположениях относительно непрерывности коэффициентов однородное линейное уравнение (2) имеет бесконечное множество фундаментальных систем решений (почему?).

Фундаментальная система решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ однородного уравнения (2) называется *нормированной* в точке $x=x_0$, если эти решения удовлетворяют соответственно следующим начальным условиям:

[illegible]

Если найдена фундаментальная система решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ однородного уравнения (2), то формула

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (3)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные, дает общее решение этого уравнения в области

$$a < x < b, |y| < +\infty, |y'| < +\infty, \dots, |y^{(n-1)}| < +\infty. \quad (4)$$

Все решения однородного уравнения (2) содержатся в формуле (3). Эта формула дает возможность найти решение уравнения (2) с любыми начальными данными $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, когда x_0 принадлежит интервалу (a, b) , за счет выбора соответствующих значений произвольных постоянных. При этом, согласно сказанному ранее (гл. III, § 1, формула (6)), приходится решать систему n уравнений с n неизвестными $C_1, C_2, \dots, C_n$, которая в нашем случае является линейной и записывается в виде

дельных точек, в которых они разрывны, то последние называются *особыми точками* уравнения (1). В частности, если линейное уравнение задано в виде

$$p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x),$$

где $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$, $f(x)$ непрерывны в (a, b) , то особыми точками этого уравнения будут только те точки, в которых коэффициент при старшей производной $p_0(x)$ обращается в нуль.

В каждом из интервалов, не содержащих особых точек, существует, вообще говоря, своя фундаментальная система решений однородного уравнения, позволяющая построить общее решение этого уравнения в области D вида (4), где интервал (a, b) нужно заменить рассматриваемым интервалом.

Построение однородного линейного уравнения, имеющего заданную фундаментальную систему решений. Пусть $y_1, y_2, \dots, y_n$ — заданные функции от x , линейно независимые в интервале (a, b) и имеющие непрерывные производные до порядка n включительно. Рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) является однородным линейным уравнением n -го порядка, а функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ образуют фундаментальную систему его решений. Если при этом вронскиан $W(x)$ функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ отличен от нуля в интервале (a, b) , то, разрешая уравнение (8) относительно $y^{(n)}$, мы получим однородное линейное уравнение с коэффициентами, непрерывными в интервале (a, b) . Если же $W(x)$ обращается в нуль в некоторой точке $x=x_0$ из интервала (a, b) , то в этой точке хотя бы один из коэффициентов упомянутого уравнения будет разрывным.

2. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Однородное уравнение. Рассмотрим сначала однородное (линейное) уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (1)$$

предполагая, что его коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ — постоянные вещественные числа. Это уравнение имеет фундаментальную систему решений $y_1, y_2, \dots, y_n$, определенную при всех x и состоящую из степенных, показательных и тригонометрических функций. Соответствующее ей общее решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

определено в области

$$|x| < +\infty, |y| < +\infty, |y'| < +\infty, \dots, |y^{(n-1)}| < +\infty,$$

т. е. во всем пространстве $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (почему?).

Излагаемый ниже метод построения указанной выше фундаментальной системы решений (*метод Эйлера*) состоит в том, что частное решение уравнения (1) ищется в виде

$$y = e^{\lambda x}, \quad (2)$$

где λ — некоторое постоянное число (вещественное или комплексное), подлежащее определению.

Подставляем функцию (2) в уравнение (1):

$$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) e^{\lambda x} = 0.$$

Отсюда следует, что λ должно удовлетворять уравнению

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (3)$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* уравнения (1).

Структура фундаментальной системы уравнений (а следовательно, и соответствующего ей общего решения) зависит от вида корней характеристического уравнения (3). Различают три случая.

1. *Все корни характеристического уравнения различны и вещественны.* Обозначим их через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда фундаментальной системой решений будет: $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$, а общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2. *Все корни характеристического уравнения различны, но среди них имеются комплексные.* Пусть $\lambda_1 = a + ib$ — комплексный корень характеристического уравнения. Тогда $\lambda_2 = a - ib$ тоже будет корнем этого уравнения (почему?). Этим двум корням соответствуют два линейно независимых частных решения: $y_1 = e^{ax} \cos bx, y_2 = e^{ax} \sin bx$.

Если корни λ_1 и λ_2 чисто мнимые: $\lambda_1 = ib, \lambda_2 = -ib$, то соответствующими линейно независимыми частными решениями будут $y_1 = \cos bx, y_2 = \sin bx$.

Записав линейно независимые частные решения, соответствующие другим сопряженным парам комплексных корней и всем вещественным корням, получим фундаментальную систему решений. Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами даст общее решение уравнения (1). При этом корням $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ в формуле общего решения соответствует выражение вида

$$e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx),$$

а чисто мнимым корням $\lambda_{1,2} = \pm ib$ отвечает сумма

$$C_1 \cos bx + C_2 \sin bx.$$

3. Среди корней характеристического уравнения имеются кратные. Пусть λ_1 — вещественный k -кратный корень. Тогда ему соответствует k линейно независимых частных решений вида $e^{\lambda_1 x}$, $x e^{\lambda_1 x}$, ..., $x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$, а в формуле общего решения — выражение вида

$$e^{\lambda_1 x} (C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}).$$

Если $\lambda_1 = a + ib$ — комплексный корень характеристического уравнения кратности k , то ему и сопряженному с ним корню $\lambda_2 = a - ib$ той же кратности соответствуют $2k$ линейно независимых частных решения вида:

$$\left. \begin{aligned} e^{ax} \cos bx, \quad x e^{ax} \cos bx, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{ax} \cos bx, \\ e^{ax} \sin bx, \quad x e^{ax} \sin bx, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{ax} \sin bx. \end{aligned} \right\}$$

В формуле общего решения этим корням соответствует выражение вида

$$e^{ax} ((C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \cos bx + \\ + (C_{k+1} + C_{k+2} x + \dots + C_{2k} x^{k-1}) \sin bx).$$

Паре чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm ib$ кратности k отвечает сумма

$$(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \cos bx + \\ + (C_{k+1} + C_{k+2} x + \dots + C_{2k} x^{k-1}) \sin bx.$$

Записав линейно независимые частные решения указанного выше вида, соответствующие всем простым и кратным вещественным корням, а также сопряженным парам простых и кратных комплексных корней, получим фундаментальную систему решений.

Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами даст общее решение уравнения (1).

Неоднородное уравнение. Неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (4)$$

с помощью метода вариации произвольных постоянных всегда может быть проинтегрировано в квадратурах от элементарных функций, ибо соответствующее ему однородное уравнение

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + a_2 z^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 0 \quad (5)$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из элементарных функций.

В некоторых случаях для неоднородного уравнения (4) удается найти частное решение методом неопределенных коэффициентов, исходя из заранее известного вида последнего. Тогда для получения общего решения неоднородного уравнения (4) остается при-

бавить к найденному частному решению общее решение соответствующего однородного уравнения (5).

Укажем эти случаи и соответствующие им виды частных решений.

1. $f(x) = P(x)$, где $P(x)$ — полином от x , который может, в частности, быть заданным постоянным числом, отличным от нуля. Тогда, если число 0 не является корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного уравнения (4) можно найти в виде $y_1 = Q(x)$, где $Q(x)$ — полином той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

Если же 0 есть корень характеристического уравнения кратности k , то $y_1 = x^k Q(x)$.

2. $f(x) = P(x)e^{ax}$. Если число a не является корнем характеристического уравнения, то $y_1 = Q(x)e^{ax}$.

Если a есть корень характеристического уравнения кратности k , то $y_1 = x^k Q(x)e^{ax}$.

3. $f(x) = e^{ax}(P_1(x) \cos bx + P_2(x) \sin bx)$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — полиномы от x . (Эти полиномы, в частности, могут быть постоянными числами, и один из них — тождественным нулем.) Пусть m есть наивысшая из степеней полиномов $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Тогда если число $a + ib$ не является корнем характеристического уравнения, то

$$y_1 = e^{ax}(Q_1(x) \cos bx + Q_2(x) \sin bx),$$

где $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ — полиномы степени m с неопределенными коэффициентами.

Если $a + ib$ есть корень характеристического уравнения кратности k , то

$$y_1 = x^k e^{ax}(Q_1(x) \cos bx + Q_2(x) \sin bx).$$

4. $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x)$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$ — функции вида, рассмотренного в пп. 1—3. Если y_1 , y_2 , ..., y_m — частные решения, соответствующие функциям $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_m(x)$, то $Y_1 = y_1 + y_2 + \dots + y_m$ является частным решением всего уравнения (4).

Применение тригонометрических рядов Фурье к нахождению периодического частного решения. Для того чтобы уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (6)$$

имело ω -периодическое решение $x = x(t)$, необходимо, чтобы функция f была ω -периодической по t вдоль этого решения:

$$f\left(t + \omega, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)$$

(почему?). Например, уравнение

$$\ddot{x} = t(x^2 + \dot{x}^2 - 1) - x \quad (7)$$

имеет 2π -периодическое решение

$$x = \sin t. \quad (8)$$

Здесь правая часть уравнения (7) не является 2π -периодической по t , но вдоль решения (8) она 2π -периодична.

Заметим, что не всякое уравнение (6) с ω -периодической по t правой частью имеет ω -периодическое решение. Так, уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \sin t \quad (9)$$

не имеет 2π -периодических решений (почему?).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a^2 x = f(t), \quad (10)$$

где $f(t)$ непрерывна, 2π -периодична и кусочно непрерывно дифференцируема. Тогда она разложима в ряд Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

(почему?).

Будем искать 2π -периодическое решение уравнения (10) в виде ряда Фурье

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt). \quad (11)$$

Подставляя функцию (11) в уравнение (10), получаем

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (A_k \cos kt + B_k \sin kt) + \\ & + a^2 \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt) \right) = \\ & = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \end{aligned} \quad (12)$$

Предположим, что a не равно целому положительному числу. Тогда, приравнявая в уравнении (12) свободные члены и коэффициенты при косинусах и синусах, находим:

$$a^2 A_0/2 = a_0/2, \quad (a^2 - k^2) A_k = a_k, \quad (a^2 - k^2) B_k = b_k, \quad (13)$$

откуда

$$A_0 = \frac{a_0}{a^2}, \quad A_k = \frac{a_k}{a^2 - k^2}, \quad B_k = \frac{b_k}{a^2 - k^2}.$$

Подставив найденные значения A_0 , A_k и B_k в формулу (11), получим

$$x(t) = \frac{a_0}{2a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kt + b_k \sin kt}{a^2 - k^2}, \quad (14)$$

где ряд справа сходится равномерно и его можно почленно дифференцировать два раза, вследствие чего сумма и дает искомое решение уравнения.

Если $a=n$ ($n>0$ —целое), но хотя бы один из коэффициентов a_n и b_n отличен от нуля, то из формул (13) следует, что периодического решения вида (14) не существует. Уравнение (10) не имеет в этом случае периодических решений, подобно уравнению (9).

Если $a=n$ ($n>0$ —целое) и $a_n=b_n=0$, то уравнение (10) будет иметь 2π -периодическое решение вида (11) (почему?), поэтому, для того чтобы уравнение (10) допускало 2π -периодическое решение в случае $a=n>0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt = 0.$$

Замечание. В случае $a=n>0$ член $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ резонирует с частными решениями $\cos nt$ и $\sin nt$ соответствующего однородного уравнения $d^2x/dt^2 + n^2x=0$. Вычтя его из правой части уравнения (10), мы получим уравнение, для которого существует 2π -периодическое частное решение. Прибавив последнее к частному решению, соответствующему резонирующему члену, получим частное решение для всего уравнения.

Нахождение частного решения линейного уравнения операционным методом. Пусть требуется найти решение $x=x(t)$ линейного уравнения

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f(t), \quad (15)$$

где $a_1, \dots, a_n$ —вещественные числа; $f(t)$ непрерывна при $t \geq 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x = x_0, \quad x' = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)} = x_0^{(n-1)} \quad \text{при } t = 0.$$

Искомое решение существует и единственно. Найдем его операционным методом, т. е. построим сначала изображение решения

$$\bar{x}(p) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad (16)$$

а затем, пользуясь таблицей изображений (см. например, [7, с. 256]), найдем искомое решение $x(t)$ —оригинал.

Взяв изображение обеих частей уравнения (16), получим операторное уравнение

$$P(p) \bar{x}(p) = \bar{f}(p) + \psi(p), \quad (17)$$

где

$$P(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n;$$

$$\psi(p) = p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_0' + \dots + x_0^{(n-1)} +$$

$$+ a_1 (p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x_0' + \dots + x_0^{(n-2)}) + \dots + a_{n-1} x_0,$$

из которого найдем изображение искомого решения

$$\bar{x}(p) = \frac{\bar{f}(p) + \psi(p)}{P(p)}. \quad (18)$$

Восстановив по изображению (18) оригинал, получим искомое решение $x = x(t)$.

Заметим, что в случае нулевых начальных условий ($x_0 = x_0' = \dots = x_0^{(n-1)} = 0$) функция $\psi(p)$ будет тождественно равна нулю, и операторное уравнение примет наиболее простой вид:

$$P(p) \bar{x}(p) = \bar{f}(p),$$

откуда

$$\bar{x}(p) = \bar{f}(p)/P(p).$$

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0. \quad (19)$$

Здесь характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$$

имеет различные вещественные корни: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, поэтому совокупность функций $y_1 = 1$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$ будет фундаментальной системой решений, а

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

является общим решением уравнения (19).

2. Дано дифференциальное уравнение

$$y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0. \quad (20)$$

Его характеристическим уравнением будет

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = 0.$$

Оно имеет один вещественный корень $\lambda_1 = 1$ и два комплексно-сопряженных корня $\lambda_2 = -2 + 3i$, $\lambda_3 = -2 - 3i$. Поэтому функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x} \cos 3x$, $y_3 = e^{-2x} \sin 3x$ образуют фундаментальную систему решений, а

$$y = C_1 e^x + e^{-2x} (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$$

является общим решением уравнения (20).

3. Пусть дано уравнение

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

имеет один вещественный корень $\lambda_1 = 2$ и два чисто мнимых корня $\lambda_2 = 2i$; $\lambda_3 = -2i$. Поэтому $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = \cos 2x$, $y_3 = \sin 2x$ и

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

4. Для уравнения

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$$

имеем:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0; \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Здесь один корень простой и один двукратный. Поэтому $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = x e^{2x}$ и

$$y = C_1 e^x + e^{2x} (C_2 + C_3 x).$$

5. Пусть дано уравнение

$$y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 + i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1 - i$, так что мы имеем случай двукратных комплексно-сопряженных корней. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= e^{-x} \cos x, & y_2 &= x e^{-x} \cos x, \\ y_3 &= e^{-x} \sin x, & y_4 &= x e^{-x} \sin x \end{aligned} \right\}$$

и

$$y = e^{-x} ((C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x).$$

6. Для уравнения

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

имеем

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0; \lambda_1 = \lambda_2 = i, \lambda_3 = \lambda_4 = -i$$

Поэтому $y_1 = \cos x$, $y_2 = x \cos x$, $y_3 = \sin x$, $y_4 = x \sin x$ и

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x.$$

7. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$y'' - y' = e^x + e^{2x} + x. \quad (21)$$

Соответствующим однородным уравнением будет

$$z'' - z' = 0. \quad (22)$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \quad (23)$$

имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Поэтому

$$z = C_1 + C_2 e^x. \quad (24)$$

Теперь нужно найти частное решение рассматриваемого неоднородного уравнения (21). Для этого отыщем сначала частные решения для каждого из трех уравнений:

$$y'' - y' = e^x, \quad y'' - y' = e^{2x}, \quad y'' - y' = x.$$

Уравнение

$$y'' - y' = e^x \quad (25)$$

имеет частное решение вида

$$y_1 = A x e^x, \quad (26)$$

ибо у показательной функции e^x , стоящей в правой части этого уравнения, коэффициент при x , будучи равным 1, является корнем характеристического уравнения (23). Подставляя функцию (26) в уравнение (25), имеем:

$$\begin{array}{r|l} 0 & y_1 = A x e^x \\ (-1) & y_1' = A e^x + A x e^x \\ 1 & y_1'' = 2A e^x + A x e^x \\ \hline & A e^x = e^x \end{array}$$

Отсюда $A = 1$. Следовательно,

$$y_1 = x e^x. \quad (27)$$

Уравнение

$$y'' - y' = e^{2x} \quad (28)$$

имеет частное решение вида

$$y_2 = A e^{2x}, \quad (29)$$

ибо число 2 не является корнем характеристического уравнения. Подставив функцию (29) в уравнение (28), найдем $A = 1/2$, так что

$$y_2 = \frac{1}{2} e^{2x}. \quad (30)$$

Уравнение

$$y'' - y' = x \quad (31)$$

имеет частное решение вида

$$y_3 = x(Ax + B), \quad (32)$$

так как число 0 является простым корнем характеристического уравнения. Подставляя функцию (32) в уравнение (31), имеем:

$$\begin{array}{r|l} 0 & y_3 = Ax^2 + Bx \\ (-1) & y_3' = 2Ax + B \\ 1 & y_3'' = 2A \\ \hline & -2Ax - B + 2A = x \end{array}$$

$$-2A = 1, \quad -B + 2A = 0; \quad A = -1/2, \quad B = -1,$$

следовательно,

$$y_3 = -x \left(\frac{1}{2} x + 1 \right). \quad (33)$$

Теперь, складывая частные решения (27), (30) и (33), находим частное решение Y_1 всего уравнения (21) в виде

$$Y_1 = x e^x + \frac{1}{2} e^{2x} - x \left(\frac{1}{2} x + 1 \right).$$

Прибавляя к этому частному решению общее решение (24) уравнения (22), получаем общее решение уравнения (21):

$$y = x e^x + \frac{1}{2} e^{2x} - x \left(\frac{1}{2} x + 1 \right) + C_1 + C_2 e^x.$$

Заметим, что уравнение (21) допускает понижение порядка на единицу, так как не содержит y . Положив $y' = u$, получим линейное уравнение первого порядка

$$u' - u = e^x + e^{2x} + x.$$

8. Пусть дано уравнение

$$y'' + y = \sin x + \cos 2x. \quad (34)$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$z'' + z = 0; \lambda^2 + 1 = 0; \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i;$$

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Частное решение уравнения

$$y'' + y = \sin x \quad (35)$$

следует искать в виде

$$y_1 = x(A \cos x + B \sin x), \quad (36)$$

так как число $a + ib = i$ является корнем характеристического уравнения. Подставляем функцию (36) в уравнение (35):

$$\begin{array}{l|l} 1 & y_1 = x(A \cos x + B \sin x) \\ 0 & y_1' = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x) \\ 1 & y_1'' = -2A \sin x + 2B \cos x + x(-A \cos x - B \sin x) \\ \hline & -2A \sin x + 2B \cos x = \sin x \\ & -2A = 1, 2B = 0, A = -1/2, B = 0, \end{array}$$

следовательно,

$$y_1 = -\frac{1}{2} x \cos x.$$

Для уравнения

$$y'' + y = \cos 2x \quad (37)$$

имеем

$$y_2 = A \cos 2x + B \sin 2x, \quad (38)$$

ибо здесь число $a + ib = i \cdot 2$ не является корнем характеристического уравнения.

Подставив функцию (38) в уравнение (37), найдем $A = -1/3$, $B = 0$, так что

$$y_2 = -\frac{1}{3} \cos 2x.$$

Теперь мы можем записать общее решение уравнения (34) в виде

$$y = -\frac{1}{2} x \cos x - \frac{1}{3} \cos 2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

9. Рассмотрим уравнение

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}. \quad (39)$$

Здесь найти частное решение методом неопределенных коэффициентов нельзя. Поэтому для нахождения общего решения уравнения (39) воспользуемся методом вариации произвольных постоянных.

Так как соответствующее однородное уравнение

$$z'' - z = 0$$

имеет фундаментальную систему решений $z_1 = e^x$, $z_2 = e^{-x}$, то общее решение уравнения (39) ищем в виде

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}. \quad (40)$$

Составим систему:

$$\left. \begin{aligned} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} &= 0, \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} &= \frac{e^x}{e^x + 1}. \end{aligned} \right\}$$

Решая ее, находим:

$$\left. \begin{aligned} C_1'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{e^x + 1}, \\ C_2'(x) &= -\frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{e^x + 1}. \end{aligned} \right\}$$

Интегрируя, имеем:

$$\left. \begin{aligned} C_1(x) &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + C_1, \\ C_2(x) &= -\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + C_2. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя эти значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (40), получаем общее решение уравнения (39) в виде

$$y = \frac{1}{2} ((x - \ln(e^x + 1)) e^x + (-1 + \ln(e^x + 1)) e^{-x}) + C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

10. Найти решение уравнения

$$y'' - y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

Воспользуемся общим решением $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Подставив начальные данные $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$ в систему

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \\ y' &= C_1 e^x - C_2 e^{-x}, \end{aligned} \right\}$$

получим

$$\left. \begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2, \\ 0 &= C_1 - C_2, \end{aligned} \right\}$$

откуда $C_1 = C_2 = 1/2$, так что искомым решением будет

$$y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x.$$

11. Найти решение уравнения

$$y'' + y = 0,$$

удовлетворяющее крайним условиям:

$$y = 1 \text{ при } x = 0; \quad y = 0 \text{ при } x = \pi/2. \quad (41)$$

Подставив в общее решение

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

поочередно краевые условия (41), получим $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Поэтому искомым решением будет

$$y = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi/2).$$

12. Построить фундаментальную систему решений уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

нормированную в точке $x = 0$.

Пользуясь формулой общего решения

$$y = e^x (C_1 + C_2 x),$$

находим сначала (так же как и в примере 10) частное решение y_1 , удовлетворяющее начальным условиям: $y_1 = 1$, $y_1' = 0$ при $x = 0$. Таким решением будет $y_1 = e^x (1 - x)$.

Аналогично находим, что частным решением y_2 , удовлетворяющим начальным условиям: $y_2 = 0$, $y_2' = 1$ при $x = 0$, является $y_2 = x e^x$.

Искомая фундаментальная система решений имеет вид:

$$y_1 = e^x (1 - x), \quad y_2 = x e^x.$$

13. Построить однородное линейное уравнение, для которого функции $y_1 = \operatorname{ch} x$, $y_2 = \operatorname{sh} x$ образуют фундаментальную систему решений.

Искомое уравнением, согласно формуле (8) § 1, будет

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x & y \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x & y' \\ \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x & y'' \end{vmatrix} = 0 \text{ или } y'' - y = 0.$$

14. Установить, имеет ли уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4} \quad (42)$$

периодические решения, и если да, то найти их.

Заметим, что речь может идти только о существовании 2π -периодических решений (почему?).

Так как в уравнении (42) $a = \sqrt{2} \neq n > 0$, то оно имеет одно 2π -периодическое решение

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^4 (2 - k^2)}.$$

15. Найти операционным методом частное решение уравнения

$$x'' + x = 2 + t^2, \quad (43)$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x = 0$, $x' = 0$ при $t = 0$.

Возьмем изображение обеих частей уравнения (43):

$$(p^2 + 1) \bar{x}(p) = \frac{2}{p} + \frac{2}{p^3},$$

откуда

$$\bar{x}(p) = 2/p^3.$$

Пользуясь таблицей изображений, находим $x(t) = t^2$.

В задачах 721 — 752 проинтегрировать однородное линейное уравнение.

$$721. y'' - 6y' + 8y = 0.$$

$$722. y'' - y' - 2y = 0.$$

$$723. y'' + 3y' + 2y = 0.$$

$$724. y'' - 2y' = 0.$$

$$725. y'' + 3y' = 0.$$

$$726. y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

$$727. y''' - 13y'' - 12y' = 0.$$

$$728. y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0.$$

$$729. y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0.$$

$$730. y'' - y' + y = 0.$$

$$731. y'' + 2y' + 2y = 0.$$

$$732. y'' + 4y = 0. \quad 733. y''' - y = 0.$$

$$734. y''' + 8y = 0.$$

$$735. y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0.$$

$$736. y^{(4)} - y = 0.$$

$$737. y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0.$$

738. $y^{(4)} + y = 0$. (Указание. Воспользоваться формулой извлечения корня n -й степени из комплексного числа ($z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$):

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, n-1).$$

$$739. y^{(6)} - y = 0.$$

$$740. y^{(6)} + y = 0.$$

$$741. y'' + 4y' + 4y = 0.$$

$$742. y'' = 0.$$

$$743. y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$$

$$744. y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0.$$

$$745. y''' + y'' = 0.$$

$$746. y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = 0.$$

$$747. y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0.$$

$$748. y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 16y' + 16y = 0.$$

$$749. y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.$$

$$750. y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

$$751. y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0.$$

$$752. y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0.$$

В задачах 753—781 проинтегрировать неоднородное линейное уравнение, найдя предварительно его частные решения методом неопределенных коэффициентов.

$$753. y'' - y = x^2 - x + 1.$$

$$754. y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4.$$

$$755. y'' + 5y' + 6y = 3.$$

$$756. y'' + y' = 3.$$

$$757. y'' + y = 4e^x.$$

$$758. y'' - y = 4e^x.$$

$$759. y'' - 2y' + y = 4e^x.$$

$$760. y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3.$$

$$761. y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2.$$

$$762. y'' - 3y' = e^{3x} - 18x.$$

$$763. y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 3e^{-2x}.$$

$$764. y''' - y'' = -3x + 1.$$

$$765. y^{(4)} - y = 4e^x. \quad (\text{Указание. Воспользоваться формулой}$$

Лейбница для n -й производной от произведения двух функций: $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}.$

$$766. y'' - y = 2 \sin x - 4 \cos x. \quad 767. y'' + y = 6 \sin 2x.$$

$$768. y'' - y' + y = -13 \sin 2x. \quad 769. y'' + 4y = \sin 2x.$$

$$770. y'' + y = e^x + \cos x. \quad 771. y'' + y = \cos x + \cos 2x.$$

$$772. y'' - 4y = e^x ((-4x + 4) \cos x - (2x + 6) \sin x).$$

$$773. y'' - 2y' + 2y = e^x (2 \cos x - 4x \sin x).$$

$$774. y'' + y = 2 \sin x + 4x \cos x.$$

$$775. y''' - y'' + 4y' - 4y = 3e^{2x} - 4 \sin 2x.$$

$$776. y^{(4)} - y = 4 \sin x - 8e^{-x} + 1. \quad 777. y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x.$$

$$778. y'' - y = \cos^2 x. \quad 779. y'' + 4y = \cos^2 x.$$

$$780. y'' + y = \sin x \cos 3x. \quad 781. y'' - y = \operatorname{ch} x.$$

В задачах 782—794 определить вид частного решения.

$$782. y'' + y' + ky = x. \quad 783. y'' + ky = e^{ax}.$$

$$784. y'' + k^2 y = \cos \omega x. \quad 785. y'' + y' = e^{-x} + 2x - 1.$$

$$786. y'' - y = e^x x \sin x. \quad 787. y'' - 2y' + 2y = e^x x \sin x.$$

$$788. y'' + y = x \cos x. \quad 789. y''' + y'' + y' + y = 2.$$

$$790. y''' + 2y'' + y' = (2x + 1) \sin x + (x^2 - 4x) \cos x.$$

$$791. y''' - y' = e^x \sin x + 2x^2.$$

$$792. y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = e^x (x \cos x + \sin x).$$

$$793. y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 3 \cos 2x + 1.$$

$$794. y'' + 4y = x^2 \sin^2 x.$$

В задачах 795—802 проинтегрировать уравнение методом вариации произвольных постоянных.

$$795. y'' + 4y = 1/\cos 2x. \quad 796. y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

$$797. y'' - y = 1/x. \quad 798. y''' + y' = \sin x/\cos^2 x.$$

$$799. y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}. \quad 800. y'' - y' = \frac{2 - x}{x^3} e^x.$$

$$801. y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}. \quad 802. y'' + y = -\frac{1}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}}.$$

В задачах 803—817 найти решение, удовлетворяющее поставленным начальным или граничным условиям.

$$803. y'' - 5y' + 4y = 0; y = 1, y' = 1 \text{ при } x = 0.$$

$$804. y'' - y = 0; y = 2, y' = 0 \text{ при } x = 0.$$

$$805. y'' + y = 0; y = 1, y' = 0 \text{ при } x = \pi/2.$$

$$806. y'' + 2y = 0; y = 0, y' = 0 \text{ при } x = 3.$$

$$807. y'' + 4y = \sin 2x; y = 0, y' = 0 \text{ при } x = 0.$$

$$808. y'' - y = x; y = 1, y' = -1 \text{ при } x = 0.$$

$$809. y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}; y = 0, y' = 0 \text{ при } x = 0.$$

$$810. y''' - y' = 0; y = 1, y' = 0, y'' = 0 \text{ при } x = 2.$$

$$811. y^{(4)} - y = 0; y = 1, y' = 1, y'' = 1, y''' = 1 \text{ при } x = 0.$$

$$812. y^{(5)} + 6y^{(4)} - 3y = 0; y = 0, y' = 0, y'' = 0, y''' = 0, y^{(4)} = 0 \text{ при } x = 1.$$

$$813. y'' + y = 0; y = 0 \text{ при } x = 0, y = 1 \text{ при } x = \pi/2.$$

$$814. y'' + y = 0; y = 0 \text{ при } x = 0, y = 0 \text{ при } x = \pi.$$

$$815. y'' + y = 0; y = 1 \text{ при } x = 0, y = 1 \text{ при } x = \pi.$$

$$816. y'' + y = x; y = 1 \text{ при } x = 0, y = \pi/2 \text{ при } x = \pi/2.$$

$$817. y'' - y = 0; y = 1 \text{ при } x = 0, y = (e^2 + 1)/2e \text{ при } x = 1.$$

818. Материальная точка массой m движется по оси Ox , находясь под действием силы $(-ax)$, притягивающей ее к началу координат, силы сопротивления среды $\left(-b \frac{dx}{dt}\right)$ и возмущающей силы, направленной по оси Ox и равной $F(t)$ в момент времени t . Составить дифференциальное уравнение движения этой точки. (Указание. Воспользоваться законом Ньютона, согласно которому произведение массы тела на ускорение равно силе, действующей на тело. Ввести обозначения: $h = b/(2m)$, $k^2 = a/m$, $f(t) = F(t)/m$.)

819. Проинтегрировать дифференциальное уравнение предыдущей задачи в предположении, что $f(t) \equiv 0$, $h = 0$ (случай свободных колебаний в среде без сопротивления). Найти период и частоту колебаний. Найти амплитуду и начальную фазу колебания, если заданы начальные условия: $x = x_0$, $dx/dt = v_0$ при $t = 0$. Рассмотреть случаи: а) $k = 1$, $x_0 = 0$, $v_0 = 1$; б) $k = 1$, $x_0 = 2$, $v_0 = 0$.

820. Проинтегрировать дифференциальное уравнение задачи 818 в предположении, что $h > 0$, $f(t) \equiv 0$ (случай свободных колебаний в среде с сопротивлением, пропорциональным первой степени скорости). В каком случае (при каком соотношении между k и h) движение точки будет затухающим гармоническим колебанием? Найти начальную амплитуду (значение амплитуды при $t = 0$) и начальную фазу, если заданы начальные условия: $x = 1$, $dx/dt = 2$ при $t = 0$, считая, что $k = 2$, $h = 1$.

821. Проинтегрировать дифференциальное уравнение задачи 818 в предположении, что $h = 0$, $f(t) = M \sin \omega t$ (случай вынужденных колебаний в среде без сопротивления при наличии синусоидальной возмущающей силы). Рассмотреть случаи $\omega \neq k$ и $\omega = k$ (резонанс).

822. Доказать, что решением уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = f(t)$ с нулевыми начальными значениями искомой функции и ее производной при $t = 0$ будет

$$x = \frac{1}{k} \int_0^t f(u) \sin k(t-u) du.$$

823. При каком условии относительно ω общее решение уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + x = \cos \omega t$ не будет иметь векового члена (т. е. слагаемого в виде произведения периодической функции и степени независимой переменной)?

824. При каких значениях k общее решение уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = \cos 2t$ не имеет векового члена?

825. При каких значениях h все ненулевые решения уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + x = 0$ представляют собой затухающие гармонические колебания?

826. При каких значениях k все ^{ну}левые решения уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + k^2x = 0$ представляют собой затухающие гармонические колебания?

827. При каких значениях q уравнение $y'' + qy = 0$ имеет ненулевые решения, стремящиеся к нулю при $x \rightarrow +\infty$?

828. При каких значениях p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$?

829. При каких значениях p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ ограничены при всех $x \geq 0$?

830. При каких значениях p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ являются периодическими функциями от x ?

831. При каких значениях параметра λ уравнение $y'' + \lambda y = 0$ имеет ненулевые решения, удовлетворяющие краевым условиям: $y = 0$ при $x = 0$, $y = 0$ при $x = \pi$? Найти эти решения.

832. Доказать, что если уравнение $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ имеет отличное от нуля характеристическое число λ_1 кратности k , то подстановкой $y = e^{\lambda_1 x} z$ оно приводится к однородному линейному уравнению с постоянными коэффициентами, которое будет иметь характеристическое число 0 той же кратности.

В задачах 833, 834 построить фундаментальную систему решений уравнения, нормированную в точке $x = 0$.

$$833. y'' + k^2 y = 0.$$

$$834. y'' - k^2 y = 0.$$

В задачах 835—837 построить однородное линейное уравнение, имеющее заданную фундаментальную систему решений.

$$835. y_1 = \cos x, y_2 = \sin x.$$

$$836. y_1 = e^{-x} \sin 2x, y_2 = e^{-x} \cos 2x, y_3 = 1.$$

$$837. y_1 = \sin x, y_2 = \cos x, y_3 = e^x, y_4 = e^{-x}.$$

838. Исследовать вопрос о существовании периодических решений уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sin^2 t$.

839. Выяснить, существуют ли периодические решения уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2}.$$

840. Найти общее решение уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|$,

отыскав предварительно его частное решение. (Указание. Разложить правую часть в тригонометрический ряд Фурье, выделить член, резонирующий с частными решениями соответствующего однородного уравнения, и воспользоваться замечанием на с. 141.)

В задачах 841—843 найти операционным методом решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

841. $x''' - 2x'' + 9x' - 18x = 0$; $x = 1$, $x' = 2$, $x'' = 4$ при $t = 0$.

842. $x'' - 2x' + x = 4e^t$; $x = 0$, $x' = 0$ при $t = 0$.

843. $x'' + x = 6 \sin 2t$; $x = 0$, $x' = -4$ при $t = 0$.

844. (Д. А. Добротин.) Пусть дано неоднородное линейное уравнение n -го порядка $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t)$, где a_k — вещественные числа, а $f(t)$ — вещественная функция от t ($t > 0$). Предположим, что вещественные части всех характеристических чисел отрицательны. Доказать, что для чисто вынужденного колебания, т. е. для решения $y = y(t)$ данного неоднородного уравнения, удовлетворяющего нулевым начальным условиям: $y = 0$, $y' = 0$, ..., $y^{(n-1)} = 0$ при $t = 0$, справедлива оценка

$$|y(t)| < \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda(t-\tau)} |f(\tau)| d\tau \quad (t > 0),$$

где λ — наибольшая из вещественных частей характеристических чисел.

3. УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К УРАВНЕНИЯМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Замена независимой переменной. *Линейное дифференциальное уравнение сохраняет свой вид при любой замене независимой переменной, причем однородное уравнение остается однородным.* Этим свойством можно воспользоваться для того, чтобы попытаться привести данное однородное линейное уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами. Оказывается (как показали Н. П. Еругин и Т. Пейович), что если уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 \quad (1)$$

может быть приведено к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены независимой переменной, то только по формуле вида

$$t = c \int \sqrt[n]{p_n(x)} dx. \quad (2)$$

Заметим, что подстановка (2), даже если и не приводит к уравнению с постоянными коэффициентами, иногда все же полезна, ибо приводит уравнение (1) к такому виду, в котором коэффициент при искомой функции является постоянной величиной.

Уравнение Эйлера. Для однородного линейного уравнения Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \quad (3)$$

по формуле (2) при $x > 0$ получаем подстановку

$$x = e^t, \quad (4)$$

которая действительно приводит уравнение (3) к уравнению с постоянными коэффициентами (почему?).

Замечание. При $x < 0$ полагают $x = -e^t$, что приводит к общему решению того же вида (с заменой x на $-x$). Поэтому достаточно найти общее решение при $x > 0$ и заменить в нем x на $|x|$.

Уравнение

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \\ + a_{n-1} (ax + b) y' + a_n y = 0$$

приводится к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью подстановки $ax + b = e^t$.

Неоднородное линейное уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

подстановкой (4) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами. При этом если $f(x) = P(\ln x) x^\alpha$, где P — полином, то частное решение полученного уравнения можно найти методом неопределенных коэффициентов, вследствие чего соответствующее уравнение Эйлера всегда интегрируется в элементарных функциях.

Замена искомой функции. Для приведения однородного линейного уравнения к уравнению с постоянными коэффициентами можно также воспользоваться однородным линейным преобразованием искомой функции, т. е. подстановкой вида

$$y = \alpha(x) z, \quad (5)$$

где z — новая неизвестная функция, ибо всякое преобразование вида (5) не нарушает ни линейности, ни однородности линейного дифференциального уравнения (1).

Коэффициент $\alpha(x)$ всегда можно выбрать так, чтобы в полученном уравнении коэффициент при производной $(n-1)$ -го порядка был равен нулю. Если при этом все остальные коэффициенты окажутся постоянными, то мы получим уравнение с постоянными коэффициентами.

Заметим, что указанное преобразование можно делать и в неоднородном уравнении.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (6)$$

Подстановка

$$y = e^{-\int (p(x)/2) dx} z \quad (7)$$

приводит уравнение (6) к виду

$$z'' + I(x)z = 0, \quad (8)$$

где

$$I(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x). \quad (9)$$

Если окажется, что $I(x) = \text{const}$, то уравнение (8) будет уравнением с постоянными коэффициентами.

При интегрировании уравнения (6) иногда оказывается полезной комбинация подстановок (2) и (7), первая из которых приводит это уравнение к уравнению с постоянным коэффициентом при искомой функции, а вторая уничтожает член, содержащий первую производную от искомой функции. В результате может получиться уравнение с постоянными коэффициентами.

Самосопряженное однородное линейное уравнение второго порядка. Однородное линейное уравнение второго порядка всегда можно привести к виду, не содержащему первой производной, и с помощью замены независимой переменной $x = \varphi(t)$, которая не нарушает ни линейности, ни однородности данного уравнения.

Действительно, рассмотрим сначала *самосопряженное уравнение*

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = 0 \text{ или } (p(x)y')' + q(x)y = 0. \quad (10)$$

(коэффициент при y' является производной от коэффициента при y''). Предположив, что $p(x) > 0$ в рассматриваемом интервале изменения x , сделаем замену независимой переменной:

$$t = \int \frac{dx}{p(x)} \quad (x = x(t)).$$

Тогда

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt} \frac{1}{p(x)} \quad (x = x(t)),$$

поэтому

$$p(x)y'_x = p(x)y'_t \frac{1}{p(x)} = y'_t,$$

$$(p(x)y'_x)'_x = y''_{tt} \frac{1}{p(x)},$$

вследствие чего уравнение (10) примет вид

$$y''_{tt} \frac{1}{p(x)} + q(x)y = 0 \text{ или } y''_{tt} + Q(t)y = 0, \quad (11)$$

где $Q(t) = p(x(t))q(x(t))$.

Пусть теперь дано однородное линейное уравнение второго порядка общего вида

$$p_0(x) y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0. \quad (12)$$

Умножив обе его части на функцию

$$\mu(x) = \frac{1}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}$$

см., например, [8, с. 434]), получим самосопряженное уравнение вида (10), где

$$p(x) = e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx}.$$

Поэтому подстановка

$$t = \int e^{-\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} dx \quad (13)$$

приводит уравнение (12) к виду, не содержащему первой производной.

Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0. \quad (14)$$

Это уравнение Эйлера. Полагая $x = e^t$ и выражая производные от y по x через производные по новой независимой переменной t , находим:

$$y'_x = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x_t} = y'_t e^{-t}, \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{dt} e^{-t},$$

$$y''_{x^2} = (y''_{t^2} e^{-t} - y'_t e^{-t}) e^{-t} = (y''_{t^2} - y'_t) e^{-2t}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (14), получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Его общим решением будет $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$. Поэтому

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3$$

есть общее решение уравнения (14).

• 2. Пусть дано уравнение

$$y'' - 2xy' + x^2 y = 0. \quad (15)$$

С помощью подстановки вида (7) приведем его к уравнению, не содержащему члена с первой производной:

$$y = e^{x^2/2} z. \quad (16)$$

Вычисляя $I(x)$ по формуле (9), находим, что $I(x) = 1$. Поэтому подстановка (16) приводит уравнение (15) к виду $z'' + z = 0$. Следовательно,

$$y = e^{x^2/2} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

будет общим решением уравнения (15).

• 3. Пусть дано уравнение

$$xy'' + \frac{1}{2} y' - y = 0 \quad (x > 0). \quad (17)$$

Приведем его к самосопряженному виду, умножив обе части на

$$\mu(x) = \frac{1}{x} e^{\int (1/2x) dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Получим

$$(\sqrt{x} y')' - \frac{1}{\sqrt{x}} y = 0.$$

Приведем это уравнение к виду, не содержащему первой производной, с помощью замены независимой переменной. В силу выражения (13) $t = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$, поэтому, согласно уравнениям (11), приходим к уравнению $y''_{t^2} - y = 0$. Так как его общее решение имеет вид $y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$, то общим решением данного уравнения (17) будет

$$y = C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}.$$

В задачах 845—860 проинтегрировать линейное уравнение Эйлера.

$$845. x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0.$$

$$846. x^2 y'' + xy' - y = 0.$$

$$847. x^2 y'' + xy' - \frac{1}{4} y = 0.$$

$$848. x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

$$849. x^2 y'' + xy' + 4y = 0.$$

$$850. x^2 y'' + 5xy' + 13y = 0.$$

$$851. x^2 y'' + y = 0.$$

$$852. xy'' - y' = 0.$$

$$853. x^2 y''' - 2y' = 0.$$

$$854. xy''' + y'' = 0.$$

$$855. x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0.$$

$$856. (x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0.$$

$$857. (2x+1)^2 y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -8x - 4.$$

$$858. x^2 y'' - xy' + y = 6x \ln x. \quad 859. x^2 y'' - xy' = -x + 37x.$$

$$860. x^2 y'' + xy' + y = 2 \sin(\ln x).$$

861. Найти все уравнения вида $y'' + q(x)y = 0$, приводящиеся к однородным линейным уравнениям с постоянными коэффициентами с помощью замены независимой переменной.

862. Та же задача для уравнений вида $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Доказать, что найденное условие выполняется для уравнений Эйлера и Чебышева.

В задачах 863—870 уравнение привести к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены независимой переменной (приводящей данное уравнение к уравнению с постоянным коэффициентом при искомой функции) и проинтегрировать его.

$$863. x^4 y'' + 2x^3 y' + n^2 y = 0.$$

$$864. 2xy'' + y' - 2y = 0.$$

$$865. xy'' + \frac{1}{2} y' + y = 0.$$

$$866. (1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0.$$

$$867. (1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0. \quad 868. y'' - y' + e^{2x} y = 0.$$

$$869. \sin x \cos x \cdot y'' - y' + m^2 \operatorname{tg} x \sin^3 x \cdot y = 0.$$

$$870. x^4 y'' + 2x^3 y' - 4y = 1/x.$$

В задачах 871—873 избавиться в уравнении от члена с первой производной с помощью замены искомой функции и проинтегрировать полученное уравнение.

$$871. x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/4) y = 0.$$

$$872. xy'' + 2y' - xy = e^x. \quad 873. y'' + \frac{2}{x} y' - a^2 y = 2.$$

В задачах 874—877 проинтегрировать уравнение, комбинируя замену независимой переменной и искомой функции так, чтобы с помощью одной из них сделать коэффициент при искомой функции постоянным, а с помощью другой избавиться от члена с первой производной от искомой функции.

$$874. x^4 y'' + k^2 y = 0. \quad 875. x^4 y'' - k^2 y = 0.$$

$$876. y'' + 2xy' + (1/x^2 + 1 + x^2) y = 0.$$

$$877. y'' - 2xy' - (1/x^2 + 1 - x^2) y = 0.$$

В задачах 878—880 избавиться от члена с первой производной с помощью замены независимой переменной и проинтегрировать полученное уравнение.

$$878. xy'' - y' - 4x^3 y = 0. \quad 879. (1 + x^2) y'' + xy' + y = 0.$$

$$880. y'' + 2 \operatorname{th} 2x \cdot y + \frac{n^2}{\operatorname{ch}^2 2x} y = 0.$$

В задачах 881—885 привести уравнение к самосопряженному виду.

$$881. x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0 \text{ (уравнение Бесселя).}$$

$$882. (1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0 \text{ (уравнение Чебышева).}$$

$$883. xy'' + (1 - x) y' + ny = 0 \text{ (уравнение Лягерра).}$$

$$884. y'' - 2xy' + 2ny = 0 \text{ (уравнение Чебышева—Эрмита).}$$

$$885. x(x-1) y'' + (-\gamma + (1 + \alpha + \beta)x) y' + \alpha\beta y = 0 \text{ (уравнение Гаусса).}$$

В задачах 886—891 построить однородное линейное уравнение, имеющее заданную фундаментальную систему решений. Выяснить, какие особенности имеют заданные решения или их вронскиан в особых точках полученного уравнения.

$$886. y_1 = x^2, y_2 = x^3. \quad 887. y_1 = 1/x, y_2 = x.$$

$$888. y_1 = x, y_2 = x \ln x. \quad 889. y_1 = \cos x/\sqrt{x}, y_2 = \sin x/\sqrt{x}.$$

$$890. y_1 = x, y_2 = \sqrt{1-x^2}. \quad 891. y_1 = \sin x/x, y_2 = \cos x/x.$$

4. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Понижение порядка однородного линейного уравнения с помощью известных частных решений. Если для уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 \quad (1)$$

известно ненулевое частное решение y_1 , то подстановка

$$y = y_1 \int z dx,$$

где z — новая неизвестная функция, приводит его к уравнению $(n-1)$ -го порядка, которое тоже будет линейным и однородным (почему?).

Отсюда, в частности, следует, что для построения общего решения однородного линейного уравнения второго порядка

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 \quad (2)$$

достаточно знать только одно ненулевое частное решение его. При этом второе частное решение y_2 можно найти по формуле.

$$y_2 = y_1 \int (e^{\int -p(x) dx} / y_1^2) dx. \quad (3)$$

Если известно k линейно независимых частных решений однородного уравнения (1), то его порядок можно понизить на k единиц.

Если известно два частных решения y_1 и y_2 неоднородного линейного уравнения, то их разность $y_2 - y_1$ будет частным решением соответствующего однородного уравнения (почему?), вследствие чего порядок последнего можно понизить на единицу.

Нахождение частного решения однородного уравнения в форме функции заданного вида. Ограничимся случаем уравнения второго порядка. Если это уравнение имеет вид

$$p_0(x) y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0, \quad (4)$$

где $p_0(x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — полиномы, то иногда его частное решение можно найти в виде полинома некоторой степени n :

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (5)$$

причем коэффициент при x^n мы всегда можем считать равным 1 (почему?), а остальные коэффициенты — неопределенными.

Подставив полином (5) в уравнение (4) и приравняв нулю коэффициент при старшей степени x , получим уравнение для определения n . Затем запишем полином найденной степени с неопределенными коэффициентами и определим последние подстановкой этого полинома в данное уравнение.

Иногда удается найти частное решение уравнения (4) в виде некоторой дробно-рациональной функции или функции другого заданного вида.

Понижение порядка линейного уравнения, не содержащего

искомой функции, и линейного уравнения, не содержащего искомой функции и последовательных первых производных. Уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-k}(x)y^k = f(x) \quad (1 \leq k < n)$$

допускает понижение порядка на k единиц с помощью подстановки

$$y^k = z,$$

где z — новая неизвестная функция от x . В частности, уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} = f(x)$$

приводится, как это уже указывалось ранее (гл. III, § 3), к линейному уравнению первого порядка.

Понижение порядка однородного линейного уравнения как уравнения, однородного относительно искомой функции и ее производных. Подстановка

$$y' = yz \tag{6}$$

приводит уравнение (1) к уравнению $(n-1)$ -го порядка (гл. III, § 5), но это уравнение уже не будет линейным. В частности, однородное линейное уравнение (2) второго порядка подстановкой (6) приводится к уравнению Риккати:

$$z' = -z^2 - p(x)z - q(x).$$

Если z_1 — частное решение этого уравнения, то

$$y_1 = e^{\int z_1 dx} \tag{7}$$

будет частным решением уравнения (2).

Линейное уравнение второго порядка в точных производных. Уравнение

$$y'' + p(x)y' + p'(x)y = f(x)$$

является уравнением в точных производных (гл. III, § 7, пример 4). Оно имеет первый интеграл вида

$$y' + p(x)y = \int f(x) dx + C_1$$

и, следовательно, интегрируется в квадратурах.

Примеры. 1. Найти общее решение уравнения

$$x^2 (\ln x - 1) y'' - xy' + y = 0, \tag{8}$$

если известно, что оно имеет частное решение $y_1 = x$.

Найдем y_2 по формуле (3):

$$y_2 = x \int \left(e^{\int \frac{dx}{x (\ln x - 1)}} / x^2 \right) dx = -\ln x.$$

уравнения (8) будет

$$y = C_1 x + C_2 \ln x.$$

2. Для уравнения

$$(x^3 - 3x^2 + 1) y'' - (x^3 - 6x + 1) y' + (3x^2 - 6x) y = 0$$

найти частное решение в виде полинома.

Подставляем полином (5) в уравнение (9):

$$(x^3 - 3x^2 + 1) (n(n-1)x^{n-2} + \dots) - (x^3 - 6x + 1) \times \\ \times (nx^{n-1} + \dots) + (3x^2 - 6x) (x^n + \dots) = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициент при x^{n+2} , имеем $-n+3=0$, откуда $n=3$. Следовательно, если частное решение в виде полинома существует, то последний может быть только полиномом третьей степени. Полагая $y = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ и подставляя этот полином в уравнение (9), получаем

$$(x^3 - 3x^2 + 1) (6x + 2a_1) - (x^3 - 6x + 1) (3x^2 + 2a_1 x + a_2) + \\ + (3x^2 - 6x) (x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3) = 0.$$

Приравняем нулю коэффициенты при x^4 , x^3 , x^2 , x и свободный член:

$$\left. \begin{aligned} x^4: & 6 - 2a_1 + 3a_1 - 6 = 0, \\ x^3: & -18 + 2a_1 - a_2 + 18 + 3a_2 - 6a_1 = 0, \\ x^2: & -6a_1 + 12a_1 - 3 + 3a_3 - 6a_2 = 0, \\ x^1: & 6 + 6a_2 - 2a_1 - 6a_3 = 0, \\ x^0: & 2a_1 - a_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Так как система (10) совместна, причем $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$, то искомое решение существует и имеет вид

$$y_1 = x^3 + 1.$$

3. Найти частное решение уравнения

$$y'' + xy' - (2x^2 + 1) y = 0, \quad (11)$$

приведя его предварительно к уравнению Риккати.

Выполняя подстановку (6), получаем $z' = -z^2 - xz + 2x^2 + 1$. Нетрудно догадаться, что это уравнение имеет частное решение $z_1 = x$. Следовательно, в силу формулы (7), уравнение (11) имеет частное решение $y_1 = e^{x^2/2}$.

В задачах 892—896 найти общее решение уравнения, пользуясь указанным частным решением.

$$892. y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0; y_1 = \frac{\sin x}{x}.$$

$$893. (\sin x - \cos x) y'' - 2 \sin x \cdot y' + (\cos x + \sin x) y = 0; y_1 = e^x.$$

$$894. (\cos x + \sin x) y'' - 2 \cos x \cdot y' + (\cos x - \sin x) y = 0; y_1 = \cos x.$$

$$895. (1 - x^2) y'' - xy' + \frac{1}{4} y = 0; y_1 = \sqrt{1+x}.$$

$$896. y'' + 2xy' - 2y = 0 \text{ (угадать частное решение).}$$

В задачах 897—901 найти частное решение в виде полинома и проинтегрировать уравнение.

$$897. (x - 1) y'' - (x + 1) y' + 2y = 0.$$

$$898. (x^2 - 3x)y'' + (6 - x^2)y' + (3x - 6)y = 0.$$

$$899. (x^2 - 1)y'' = 6y.$$

$$900. x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

$$901. x^2 (2 \ln x - 1)y'' - x(2 \ln x + 1)y' + 4y = 0.$$

902. Уравнение $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 6x^2 - 2 = 0$ имеет частное решение $y_1 = x^2$. Найти общее решение этого уравнения и решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 0, y' = 0$ при $x = -1$.

903. Найти общее решение уравнения $y'' + (1 - x)y' + y = 1$, если известны два частных решения его: $y_1 = 1, y_2 = x$.

904. Найти общее решение уравнения $(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$, если известно, что оно имеет два линейно независимых частных решения в виде полиномов. (Указание. Пусть y_1 и y_2 — найденные линейно независимые частные решения в виде полиномов. Делаем в данном уравнении подстановку $y = y_1 \int z dx$. Полученное однородное линейное уравнение второго порядка будет иметь частное решение $z_1 = (y_2/y_1)'$.)

905. Уравнение Лежандра $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$ при целом $n > 0$ имеет частное решение в виде полинома n -й степени $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n((x^2 - 1)^n)}{dx^n}$ (полином Лежандра). Найти общее решение уравнения Лежандра при $n = 1$ и $n = 2$.

906. Уравнение Чебышева $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$ при целом $n > 0$ имеет частное решение в виде полинома n -й степени $T_n = \cos n \arccos x$ (полином Чебышева). Найти общее решение уравнения Чебышева при $n = 1$.

907. Уравнение Лягерра $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$ при целом $n > 0$ имеет частное решение в виде полинома n -й степени $L_n(x) = e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$ (полином Лягерра). Найти общее решение уравнения Лягерра при $n = 1$.

908. Уравнение Чебышева — Эрмита $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ при целом $n > 0$ имеет частное решение в виде полинома $H_n(x) = e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$ (полином Чебышева — Эрмита, $H_0(x) = 1$). Найти общее решение уравнения Чебышева — Эрмита при $n = 1$.

909. Найти общее решение уравнения $x(x - 1)^2 y'' + x(x - 1)y' - y = 0$, имеющего частное решение в виде $y_1 = ax/(x - 1)$.

910. Найти общее решение уравнения $x(x - 1)y'' + (1 + x)y' - y = 0$, имеющего частное решение в виде $y_1 = a/(x - 1)$.

911. Найти общее решение однородного уравнения Стокса $x(x - 1)^2 y'' + \beta y = 0$, где β — постоянная, если известно, что оно имеет частное решение вида $y = x^m (x - 1)^n$, причем m и n — некоторые постоянные числа.

В задачах 912 — 917 проинтегрировать линейное уравнение, допускающее понижение порядка.

$$912. y'' + \frac{2}{x} y' = 0.$$

$$913. xy''' + y'' = 3x^2.$$

$$914. x^2 y''' + xy'' - y' = 3x^2.$$

$$915. x \ln x \cdot y'' + y' = 0.$$

$$916. xy'' - (1+x)y' - (x^3 - x^2)y = 0.$$

$$917. xy'' + y' - (1+x)y = 0.$$

918. Найти вид однородного линейного уравнения второго порядка $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, приводящегося к специальному уравнению Риккати $z' + Az^2 = Bx^m$.

В задачах 919—925 проинтегрировать линейное уравнение как уравнение в точных производных или как уравнение, для которого легко находится интегрирующий множитель.

$$919. y'' + p(x)y' + p'(x)y = 0.$$

$$920. y'' + 2 \operatorname{tg} x \cdot y' + \frac{2}{\cos^2 x} y = 0.$$

$$921. y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 2. \quad 922. y'' + 2xy' + 2y = 2x.$$

$$923. x^2y'' - xy' + y = x^2. \quad 924. y'' - 2xy' - 2y = 0.$$

$$925. \sin^2 x \cdot y'' + \sin 2x \cdot y' - 2y = 0.$$

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ И ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Нахождение решений однородного линейного уравнения второго порядка в виде степенных рядов. Пусть дано уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

и поставлены начальные условия:

$$y = y_0, \quad y' = y'_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \quad (2)$$

Если коэффициенты уравнения (1) $p(x)$ и $q(x)$ разложимы в степенные ряды по степеням разности $x - x_0$:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \quad (3)$$

сходящиеся в области $|x - x_0| < \rho$, то, согласно теореме Коши (о существовании голоморфного решения), уравнение (1) имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям (2) и разложимое в ряд по степеням разности $x - x_0$:

$$y = y_0 + y'_0 (x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad (4)$$

который сходится по крайней мере в той же области $|x - x_0| < \rho$, что и ряды (3).

При этом в начальных условиях (2) числа y_0 и y'_0 можно брать любыми.

Если заданы числа y_0 и y'_0 , коэффициенты c_h ряда (4) определяются единственным образом, например подстановкой ряда (4) в уравнение (1) и приравниванием нулю коэффициентов при различных степенях $x - x_0$ в левой части полученного равенства (*метод неопределенных коэффициентов*).

На деле чаще всего $p(x)$ и $q(x)$ являются либо полиномами, либо отношениями полиномов. В первом случае ряд (4) сходится при всех значениях x . Во втором случае радиус сходимости ряда (4) не меньше расстояния от точки $x = x_0$ до ближайшей из точек, в которых знаменатели коэффициентов уравнения (1), рассматриваемые как функции комплексной переменной x , обращаются в нуль.

Для построения общего решения уравнения (1) достаточно найти два линейно независимых частных решения y_1 и y_2 . Обычно строят фундаментальную систему решений y_1 и y_2 , нормированную в точке $x = x_0$, так что: $y_1 = 1$, $y'_1 = 0$ при $x = x_0$; $y_2 = 0$, $y'_2 = 1$ при $x = x_0$.

Если ряд (4), представляющий решение уравнения (1), удастся просуммировать, т. е. выразить его сумму через элементарные функции, то второе частное решение можно найти по формуле (3), § 4.

Изложенный выше способ интегрирования однородных линейных уравнений второго порядка переносится без существенных изменений на однородное линейное уравнение любого порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0.$$

При этом решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x = x_0$$

(в виде ряда по степеням разности $x - x_0$), записывается так:

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \sum_{h=n}^{\infty} c_h (x - x_0)^h \quad (|x - x_0| < \rho).$$

Решение неоднородного линейного уравнения любого порядка, все коэффициенты и правая часть которого разлагаются в ряды по степеням $x - x_0$, также можно искать в виде ряда по степеням $x - x_0$.

Нахождение решений однородного линейного уравнения второго порядка в виде обобщенных степенных рядов. Ряд вида

$$(x - x_0)^p \sum_{h=0}^{\infty} c_h (x - x_0)^h \quad (c_0 \neq 0), \quad (5)$$

где ρ — заданное число, а степенной ряд $\sum_{h=0}^{\infty} c_h (x - x_0)^h$ сходится в некоторой области $|x - x_0| < R$, называется *обобщенным степенным рядом*. Если ρ — целое неотрицательное число, то обобщенный степенной ряд (5) обращается в обычный степенной ряд.

Пусть $x = x_0$ — особая точка уравнения (1), т. е. особая точка хотя бы одного из коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$, так что $p(x)$ и $q(x)$ непредставимы (одновременно) ни в какой окрестности точки $x = x_0$ степенными рядами вида (3). Тогда теорема Коши неприменима. Но во многих случаях удастся найти решение уравнения (1) в виде обобщенного степенного ряда по степеням разности $x - x_0$, который, как отмечено выше, может обратиться в обычный степенной ряд, а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема. Если коэффициенты уравнения (1) представимы в окрестности особой точки $x = x_0$ в виде:

$$p(x) = \frac{\sum_{h=0}^{\infty} p_h (x - x_0)^h}{x - x_0}, \quad q(x) = \frac{\sum_{h=0}^{\infty} q_h (x - x_0)^h}{(x - x_0)^2}, \quad (6)$$

где $p_0^2 + q_0^2 + q_1^2 \neq 0$ и ряды в числителях сходятся в некоторой области $|x - x_0| < R$, то уравнение (1) имеет хотя бы одно решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y = (x - x_0)^\rho \sum_{h=0}^{\infty} c_h (x - x_0)^h \quad (c_0 \neq 0), \quad (7)$$

причем входящий в это решение степенной ряд сходится по крайней мере в той же области $|x - x_0| < R$, что и ряды в формулах (6).

Разыскивая решение уравнения (1) в окрестности особой точки в виде обобщенного степенного ряда (7), мы можем получить на деле решение в виде обычного степенного ряда по степеням разности $x - x_0$. Это будет в том случае, когда, как уже отмечалось выше, ρ окажется целым неотрицательным числом.

Для определения показателя ρ и коэффициентов c_h нужно подставить ряд (7) в уравнение (1), сократить на $(x - x_0)^\rho$ и приравнять нулю коэффициенты при различных степенях $x - x_0$. При этом число ρ находится из так называемого *определяющего уравнения* в особой точке $x = x_0$:

$$\rho(\rho - 1) + p_0\rho + q_0 = 0. \quad (8)$$

Коэффициенты p_0 и q_0 этого уравнения можно найти по формулам

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) p(x), \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 q(x). \quad (9)$$

В случае, когда корни ρ_1 и ρ_2 определяющего уравнения (8) различны, уравнение (1) всегда имеет решение вида (7), где

есть тот из корней ρ_1 и ρ_2 , который имеет большую вещественную часть. Если ρ_1 — этот корень, то решение имеет вид

$$y_1 = (x - x_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} (x - x_0)^k \quad (c_0^{(1)} \neq 0).$$

Если разность корней $\rho_1 - \rho_2$ определяющего уравнения не является целым положительным числом, то существует решение в виде обобщенного степенного ряда, соответствующее и второму корню ρ_2 :

$$y_2 = (x - x_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} (x - x_0)^k \quad (c_0^{(2)} \neq 0). \quad (10)$$

Если же $\rho_1 - \rho_2$ есть целое положительное число, то второе частное решение или снова имеет вид (10), или же представляет собой сумму обобщенного степенного ряда и произведения некоторого обобщенного степенного ряда на $\ln(x - x_0)$:

$$y_2 = (x - x_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} (x - x_0)^k + \gamma_{-1} y_1 \ln(x - x_0),$$

где $\gamma_{-1} \neq 0$.

Наконец, если корни определяющего уравнения равны между собой ($\rho_1 = \rho_2$), то существует только одно частное решение в виде обобщенного степенного ряда. Второе же решение обязательно содержит $\ln(x - x_0)$. Его следует искать в виде

$$y_2 = (x - x_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k + \gamma_{-1} y_1 \ln(x - x_0), \quad (11)$$

где $\gamma_{-1} \neq 0$.

Примеры. 1. Для уравнения

$$(1 - x^2) y'' - x y' - y = 0 \quad (12)$$

найти фундаментальную систему решений y_1, y_2 , нормированную в точке $x=0$, в виде рядов по степеням x и построить общее решение.

Прежде всего убедимся, что решения y_1 и y_2 существуют. Если переписать уравнение (12) в виде (1), получим

$$y'' - \frac{x}{1 - x^2} y' - \frac{1}{1 - x^2} y = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения разлагаются в ряды по степеням x , сходящиеся в области $|x| < 1$. Поэтому y_1 и y_2 существуют, причем ряды, представляющие их, сходятся по крайней мере при $|x| < 1$.

Найдем y_1 :

$$\begin{array}{l|l} (-1) & y_1 = 1 + \sum_{h=2}^{\infty} c_h x^h \\ (-x) & y_1' = \sum_{h=2}^{\infty} h c_h x^{h-1} \\ (1-x^2) & y_1'' = \sum_{h=2}^{\infty} h(h-1) c_h x^{h-2} \end{array}$$

$$-1 - \sum_{h=2}^{\infty} c_h x^h - \sum_{h=2}^{\infty} h c_h x^h + \sum_{h=2}^{\infty} h(h-1) c_h x^{h-2} - \sum_{h=2}^{\infty} h(h-1) c_h x^h = 0$$

$$x^0: -1 + 2 \cdot 1 c_2 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{2!};$$

$$x: 3 \cdot 2 c_3 = 0, \quad c_3 = 0;$$

$$x^h: -c_h - h c_h + (h+2)(h+1) c_{h+2} - h(h-1) c_h = 0,$$

$$(h+2)(h+1) c_{h+2} = (1+h^2) c_h,$$

$$c_{h+2} = \frac{1+h^2}{(h+1)(h+2)} c_h \quad (h \geq 2),$$

$$c_5 = c_7 = \dots = c_{2m+1} = \dots = 0,$$

$$c_4 = \frac{1+2^2}{3 \cdot 4}, \quad c_6 = \frac{1+2^2}{4!}, \quad c_8 = \frac{(1+2^2)(1+4^2)}{6!}, \dots,$$

$$c_{2m} = \frac{(1+2^2)(1+4^2) \dots (1+(2m-2)^2)}{(2m)!}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} y_1 = 1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1+2^2}{4!} x^4 + \frac{(1+2^2)(1+4^2)}{6!} x^6 + \dots + \\ + \frac{(1+2^2)(1+4^2) \dots (1+(2m-2)^2)}{(2m)!} x^{2m} + \dots \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

Частное решение y_2 ищем в виде

$$y_2 = x + \sum_{h=2}^{\infty} c_h x^h. \quad (13)$$

Подставив решение (13) в уравнение (12), так же, как и выше, найдем все коэффициенты c_h . В результате получим

$$\begin{aligned} y_2 = x + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{2(1+3^2)}{5!} x^5 + \dots + \\ + \frac{2(1+3^2) \dots (1+(2m-1)^2)}{(2m+1)!} x^{2m+1} + \dots \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

Общим решением уравнения (12) будет

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

2. Доказать, что уравнение Гаусса

$$x(x-1)y'' + (-\gamma + (1 + \alpha + \beta)x)y' + \alpha\beta y = 0$$

в случае, когда γ не равно ни целому числу, ни нулю, имеет частное решение в виде степенного ряда по степеням x , и найти это решение.

Составляем определяющее уравнение в особой точке $x = 0$. Пользуясь формулами (9), находим:

$$\rho_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\gamma + (1 + \alpha + \beta)x}{x-1} = \gamma, \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha\beta x}{x-1} = 0.$$

Поэтому определяющим уравнением в точке $x = 0$ будет

$$\rho(\rho-1) + \gamma\rho = 0.$$

Оно имеет корни $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1 - \gamma$. Корню $\rho_1 = 0$ соответствует частное решение в виде ряда по степеням x со свободным членом, отличным от нуля:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0). \quad (14)$$

Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, находим, полагая $c_0 = 1$, все коэффициенты c_k . Подставляя их в ряд (14), получаем частное решение уравнения Гаусса в виде

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+(k-1))\beta(\beta+1) \dots (\beta+(k-1))}{k!\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+(k-1))} x^k + \dots$$

Ряд справа называется *гипергеометрическим рядом*. Он сходится при $|x| < 1$.

3. Доказать, что уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

где $n > 0$, имеет частное решение вида

$$y = x^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0), \quad (15)$$

причем ряд справа сходится при всех значениях x .

Определяющим уравнением в особой точке $x = 0$ будет

$$\rho(\rho-1) + \rho - n^2 = 0 \text{ или } \rho^2 - n^2 = 0.$$

Оно имеет корни $\rho_1 = n$, $\rho_2 = -n$. Корню $\rho_1 = n$ отвечает решение вида (15).

4. Доказать, что уравнение Бесселя ($n=0$)

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (16)$$

имеет решение в виде степенного ряда по степеням x , и найти это решение.

Определяющее уравнение в особой точке $x=0$

$$\rho(\rho-1) + \rho = 0 \text{ или } \rho^2 = 0$$

имеет кратный корень $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Поэтому уравнение (16) имеет только одно решение в виде обобщенного степенного ряда, причем последний обращается в обычный степенной ряд

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0).$$

Пользуясь методом неопределенных коэффициентов и полагая $c_0 = 1$, находим, что все коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю, а коэффициенты при четных степенях x выражаются формулой

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{1}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}},$$

так что уравнение (16) имеет решение вида

$$y_1 = J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Функция $J_0(x)$ называется *функцией Бесселя первого рода нулевого порядка*.

Второе частное решение должно содержать $\ln x$, и его следует, согласно формуле (11), искать в виде

$$y_2 = \gamma_{-1} J_0(x) \ln x + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots,$$

причем c_0 можно считать равным нулю, ибо этого всегда можно добиться, взяв вместо y_2 соответствующую линейную комбинацию y_2 и $J_0(x)$ (почему?).

Ищем y_2 в виде

$$y_2 = \gamma_{-1} J_0(x) \ln x + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, полагая при этом $\gamma_{-1} = 1$, находим

$$\begin{aligned} y_2 = K_0(x) = J_0(x) \ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \\ + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots \end{aligned}$$

Функция $K_0(x)$ называется *функцией Бесселя второго рода нулевого порядка*. Общее решение уравнения (16) можно записать в виде

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 K_0(x).$$

В задачах 926—929 найти фундаментальную систему решений уравнения в виде рядов по степеням x , нормированную в точке $x=0$, и построить общее решение.

$$926. \quad y'' - xy = 0.$$

$$927. \quad y'' + x^2 y = 0.$$

$$928. \quad y'' + \frac{1}{1-x} y = 0.$$

$$929. \quad y'' + xy' - (2x^2 + 1)y = 0.$$

В задачах 930—934 найти в виде ряда по степеням x одно частное решение уравнения, удовлетворяющее поставленным начальным условиям, просуммировать этот ряд, найти второе частное решение по формуле (3) § 4 и построить общее решение.

$$930. y'' - 2xy' + 2y = 0; y_1 = 0, y'_1 = 2 \text{ при } x = 0.$$

$$931. (1 - x^2) y'' - 2xy' + 2y = 0; y_1 = 0, y'_1 = 1 \text{ при } x = 0.$$

$$932. (1 - x) y'' + xy' - y = 0; y_1 = 1, y'_1 = 1 \text{ при } x = 0.$$

$$933. (1 - x^2) y'' - xy' + y = 0; y_1 = 0, y'_1 = 1 \text{ при } x = 0.$$

$$934. (1 - x^2) y'' - xy' = 0; y_1 = 1, y'_1 = 0 \text{ при } x = 0.$$

В задачах 935—942 найти два линейно независимых частных решения уравнения в окрестности особой точки $x=0$ в виде обобщенных степенных рядов или рядов, содержащих дополнительно $\ln x$.

$$935. y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0. \quad 936. x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0.$$

$$937. x(x-1)^2 y'' + x(x-1)y' - y = 0.$$

$$938. x^2 y'' - (3x + x^2)y' + 4y = 0.$$

$$939. x(x-1)y'' + (-1 + 3x)y' + y = 0.$$

$$940. x(x-1)y'' + (1+x)y' - y = 0.$$

$$941. x(x-1)y'' + (-2 + 2x)y' - 2y = 0.$$

$$942. x(x-1)y'' + (-2 + 3x)y' + y = 0.$$

943. Найти частное решение y_1 уравнения $xy'' + (1+x)y' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y_1 \rightarrow 1, y'_1 \rightarrow -1$ при $x \rightarrow 0$, и построить общее решение.

944. Доказать, что уравнение Лежандра $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ приводится подстановкой $x = 1 - 2t$ к уравнению Гаусса. Показать, что если n — целое положительное число, то одно из частных решений уравнения Лежандра будет полиномом n -й степени.

945. Найти общее решение уравнения Лежандра при целом $n > 0$.

946. Доказать, что уравнение Чебышева $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$ приводится подстановкой $x = 1 - 2t$ к уравнению Гаусса. Показать, что если n — целое положительное число, то одно из частных решений уравнения Чебышева будет полиномом n -й степени.

947. Привести уравнение $x^2 y'' + xy' + (k^2 x^2 - n^2)y = 0$ ($k \neq 0$) к уравнению Бесселя с помощью соответствующей замены независимой переменной.

948. Привести уравнение $y'' - \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0$ к уравнению Бесселя с помощью соответствующей однородной линейной замены искомой функции.

949. Привести уравнение Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ к виду $z'' + ((2n+1)/x)z' + z = 0$ с помощью соответствующей однородной линейной замены искомой функции.

950. Найти общее решение уравнения $xy'' + y' + y = 0$.

951. Найти частное решение y_1 уравнения $(x^2 - 2x + 2)y''' -$

$-x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y_1 = 1$, $y_1' = 1$, $y_1'' = 1$ при $x = 0$.

952. Доказать, что уравнение $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, в котором коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ представимы следующими сходящимися рядами по степени $1/x$:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{x^k}, \quad q(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q_k}{x^k} \quad (|x| > R \geq 0),$$

имеет хотя бы одно частное решение вида

$$y_1 = x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{x^k} \quad (c_0 \neq 0, |x| > R),$$

где p — некоторое число. (У к а з а н и е. Сделать замену независимой переменной $x = 1/t$, построить решение полученного уравнения в окрестности особой точки $t = 0$ в виде обобщенного степенного ряда и вернуться в найденном решении к переменной x .)

953. Доказать, что если в уравнении предыдущей задачи разложения $p(x)$ и $q(x)$ записываются в виде:

$$p(x) = \frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_k}{x^k}, \quad q(x) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{q_k}{x^k},$$

то оно имеет фундаментальную систему решений, представимых сходящимися рядами по степеням $1/x$.

В задачах 954—957 изучается асимптотическое поведение фундаментальной системы решений однородного линейного уравнения второго порядка при $x \rightarrow +\infty$.

954. Доказать, что уравнение $x^4 y'' + 2x^3 y' + \omega y = 0$ ($\omega = \text{const}$) имеет фундаментальную систему решений, обладающую свойством*

$$y_1 = 1 + O(1/x), \quad y_2 = 1 + O(1/x) \quad \text{при } \omega < 0;$$

$$y_1 = 1 + O(1/x^2), \quad y_2 = O(1/x) \quad \text{при } \omega > 0;$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 1/x \quad \text{при } \omega = 0.$$

955. Для уравнения $y'' + \frac{1}{x^4} y = 0$ найти фундаментальную систему решений y_1, y_2 , обладающую свойством $y_1 = 1 + O(1/x^2)$, $y_2 = x + O(1/x)$. (У к а з а н и е. Искать y_1 в виде $y_1 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{x^k}$ (почему существует такое решение?), просуммировать полученный ряд и найти y_2 по известной формуле (см. формулу (3) на с. 158). Можно также найти искомую фундаментальную систему решений, приведя данное уравнение к уравнению Риккати. Послед-

* Запись $f(x) = O(x^\alpha)$ означает, что отношение $f(x)/x^\alpha$ остается ограниченным при $x \rightarrow +\infty$.

нее будет специальным уравнением Риккати (см. задачу 918), удовлетворяющим известному условию интегрируемости в элементарных функциях.)

956. Для уравнения $y'' + \frac{2}{x^2(x-1)} y = 0 \quad (x > 1)$ найти фундаментальную систему решений y_1, y_2 , обладающую свойством* $y_1 = 1 + O(1/x), y_2 = x + O(\ln x)$.

957. Уравнение

$$y'' + q(x)y = 0 \quad (x > 0) \quad (17)$$

в случае, когда $q(x) \equiv 0$, имеет фундаментальную систему решений: $y_1 = 1, y_2 = x$. Если $q(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ достаточно быстро, то уравнение (17) имеет фундаментальную систему решений $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$, которая при больших значениях x мало отличается от $y_1 = 1, y_2 = x$. Справедлива следующая теорема Шпета: если $q(x) = O(1/x^{k+2})$, где $k > 0$ ($0 < x < +\infty$), то уравнение (17) имеет фундаментальную систему решений y_1, y_2 , обладающую свойством $y_1 - 1 = O(1/x^k), y_2 - x = O(1/x^{k-1})$ при $k \neq 1$ и $y_2 - x = O(\ln x)$ при $k = 1$.

Доказать теорему Шпета, если $k > 0$, целое и

$$q(x) = \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{q_n}{x^n} \quad (q_{k+2} \neq 0, x > 0).$$

(Указание. Показать, что уравнение (17) имеет частное решение y_1 в виде

$$y_1 = 1 + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{c_n}{x^n} \quad (c_k \neq 0, x > 0).$$

Записать y_2 с помощью известной формулы для второго частного решения и показать, что y_2 обладает указанным свойством.)

6. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Колеблющиеся и неколеблющиеся решения. Достаточный признак неколебательности решений. Рассмотрим уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (1)$$

Предположим, что его коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ определены и непрерывны в некотором интервале (a, b) . Тогда всякое решение уравнения (1) определено и дважды непрерывно дифференцируемо во всем интервале (a, b) .

В дальнейшем будем рассматривать только ненулевые решения, т. е. решения $y = y(x) \neq 0 \quad (a < x < b)$.

* Запись $f(x) = O(\ln x)$ означает, что отношение $f(x)/\ln x$ остается ограниченным при $x \rightarrow +\infty$.

График решения может пересекать ось Ox (такие решения существуют), но касаться ее он не может (почему?). Поэтому, обращаясь в нуль, решение обязательно меняет знак. Так как нуль всякого (ненулевого) решения уравнения (1), т. е. точки, в которых это решение обращается в нуль (при сделанном предположении относительно непрерывности коэффициентов), *изолированы* (почему?), то число нулей решения во всяком замкнутом интервале $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ конечно.

Число нулей решения в данном интервале определяет *колебательный характер* этого решения. При этом если решение обращается в нуль в интервале (a, b) не менее двух раз, то оно называется *колеблющимся* в этом интервале, в противном случае — *неколеблющимся*.

При изучении колебательного характера решений однородного линейного уравнения второго порядка (с непрерывными коэффициентами) достаточно ограничиться рассмотрением уравнения вида

$$y'' + q(x)y = 0, \quad (2)$$

ибо полное уравнение (1) подстановкой

$$y = e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx} z$$

приводится к уравнению

$$z'' + Q(x)z = 0, \quad (3)$$

где $Q(x) = -p'(x)/2 - p^2(x)/4 + q(x)$ (см. гл. IV, § 3), причем решения уравнений (1) и (3) имеют один и тот же колебательный характер (почему?).

Если в уравнении (2) коэффициент $q(x)$ не положителен, т. е.

$$q(x) \leq 0 \quad (a < x < b) \quad (4)$$

во всем интервале непрерывности (a, b) , то все (ненулевые) решения уравнения (2) будут *неколеблющимися* в этом интервале.

Сравнение колебательного характера решений. Оценка расстояния между последовательными нулями решений. Решения одного и того же однородного линейного уравнения второго порядка (с непрерывными коэффициентами) имеют одинаковый колебательный характер, а именно: *нули двух линейно независимых решений одного и того же однородного линейного уравнения второго порядка взаимно разделяют друг друга*, т. е. между двумя последовательными нулями одного из этих решений лежит ровно один нуль другого. Например, таким свойством обладают решения $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$ уравнения $y'' + y = 0$.

Пусть даны два уравнения:

$$y'' + q_1(x)y = 0, \quad z'' + q_2(x)z = 0, \quad (5)$$

коэффициенты которых непрерывны в (a, b) . Если коэффициент второго уравнения превосходит коэффициент первого:

$$q_2(x) \geq q_1(x) \quad (a < x < b), \quad (6)$$

то решения второго уравнения колеблются сильнее, чем решения первого, а именно: *между двумя последовательными нулями любого решения $y=y(x)$ первого уравнения находится по крайней мере один нуль любого решения $z=z(x)$ второго уравнения, если только в интервале между этими нулями имеется хотя бы одна точка, в которой $q_2(x) > q_1(x)$.*

Если $q(x)$ непрерывна и положительна на отрезке $[a, b]$, то для расстояния ρ между двумя последовательными нулями решений уравнения $y'' + q(x)y = 0$ имеет место оценка

$$\pi/\sqrt{M} \leq \rho \leq \pi/\sqrt{m}, \quad (7)$$

где M, m — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $q(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Примеры. 1. Найти условие, при котором все (ненулевые) решения однородного линейного уравнения второго порядка с постоянными вещественными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (8)$$

будут неколеблущимися в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Приводим уравнение (8) к виду, не содержащему первой производной:

$$z'' + Qz = 0, \quad Q = q - p^2/4. \quad (9)$$

Если выполнено условие $Q \leq 0$, т. е.

$$q \leq p^2/4, \quad (10)$$

то все решения уравнения (9), а следовательно, и уравнения (8), будут неколеблущимися в $(-\infty, +\infty)$. Условие (10) является и необходимым (почему?).

2. Исследовать колебательный характер решений уравнения Эйлера

$$x^2 y'' + a^2 y = 0 \quad (a \neq 0) \quad (11)$$

в интервале $(0, +\infty)$.

Заметим, что здесь $q(x) > 0$, поэтому указанный выше признак неколеблущести неприменим.

Приводя уравнение (11) к уравнению с постоянными коэффициентами подстановкой $x=e^t$, получаем

$$y''_{tt} - y'_t + a^2 y = 0, \quad (12)$$

откуда следует, что при $a^2 \leq 1/4$ (см. пример 1) все решения уравнения (12) неколеблущиеся. Вместе с ними будут неколеблущимися и все решения уравнения (11).

Этот пример показывает, что условие (4) является лишь достаточным условием неколеблущести решений.

3. Доказать, что все решения уравнения Эйри

$$y'' - xy = 0 \quad (13)$$

неколеблущиеся в интервале $(0, +\infty)$.

Действительно, здесь $q(x) = -x < 0$, откуда и следует неколеблущность решения уравнения Эйри. Таким образом, любое решение уравнения Эйри может пересекать положительную полуось оси Ox только один раз.

4. Исследовать колебательный характер решений уравнения Бесселя нулевого порядка

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (14)$$

в интервале $(0, +\infty)$.

Приводим уравнение (14) к виду (3):

$$z'' + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)z = 0.$$

Так как $Q(x) = 1 + \frac{1}{4x^2} > 1$, то расстояние между последовательными нулями решений будет меньше, чем π , ибо расстояние между последовательными нулями решений уравнения $u'' + u = 0$ равно π . Это следует также из формулы (7).

5. Оценить расстояние между последовательными нулями решений уравнения

$$y'' + \sin x \cdot y = 0$$

на отрезке $[0, \pi/2]$.

Здесь $q(x) \leq 1$ ($0 \leq x \leq \pi/2$). Поэтому расстояние между последовательными нулями решений больше, чем π . В этом можно также убедиться, применив формулу (7) к отрезку $[\delta, \pi/2]$ ($\delta > 0$).

958. Доказать, что все (ненулевые) решения уравнения $y'' - x^2 y = 0$ являются неколеблющимися в любом интервале (a, b) .

959. Оценить расстояние между последовательными нулями решений уравнения $y'' + \sin^2 x \cdot y = 0$ ($\pi/4 < x < 3\pi/4$).

960. Доказать, что расстояние между последовательными нулями любого решения уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ ($n \neq \pm 1/2$) стремится к π , когда x неограниченно возрастает. Чему равно это расстояние при $n = \pm 1/2$?

961. Изучить колебательный характер решений уравнения Эйри (13) в интервале $(-\infty, 0)$.

962. Доказать, что последовательные нули любого решения уравнения $x^3 y'' + xy' + (x^3 - 1/4)y = 0$ ($0 < x < +\infty$) при неограниченном возрастании x будут неограниченно сближаться.

963. Уравнения $y'' + y = 0$ и $z'' + 4z = 0$ имеют решения $y = \sin x$ и $z = \sin 2x$ с общим нулем $x_0 = 0$. Следующий за ним нуль ($x^* = \pi/2$) решения $z = \sin 2x$ второго уравнения лежит левее, чем следующий нуль ($x_1 = \pi$) решения $y = \sin x$ первого уравнения. Доказать, что если в уравнениях (5) при выполнении условия (6) решения $y = y(x)$ и $z = z(x)$ имеют общий нуль x_0 , то следующий за ним нуль x^* решения $z = z(x)$ лежит левее нуля x_1 решения $y = y(x)$, следующего за x_0 , при условии, что в интервале (x_0, x_1) существует хотя бы одна точка, в которой $q_2(x) > q_1(x)$.

964. Доказать, что каждое решение уравнения

$$y'' + q(x)y = 0 \quad (0 < x < +\infty), \quad (15)$$

в котором $q(x)$ непрерывна, $q(x) > 0$ и нижняя граница $q(x)$ положительна, имеет бесчисленное множество нулей. Может ли решение уравнения (15) иметь бесчисленное множество нулей, если $q(x) > 0$ и $q(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$? Рассмотреть вопрос о числе нулей решений уравнения Эйлера

$$y'' + \frac{a^2}{x^2} y = 0 \quad (x > 0) \quad (16)$$

в интервале $(1, +\infty)$.

965. Доказать для уравнения (15), в котором $q(x)$ непрерывна, $q(x) > 0$ и $q(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, следующую теорему Кнэзера: если $0 < q(x) \leq 1/(4x^2)$ ($x > a_0 \geq a$), то решение уравнения (15) не может иметь бесконечного числа нулей; если же $q(x) > (1 + \alpha)/(4x^2)$ ($\alpha > 0$, $x > a_0 \geq a$), то решение уравнения (15) имеет бесчисленное множество нулей. (Указание. Сравнить уравнение (15) с уравнением Эйлера (16).)

966. (Н. В. Адамов.) Дано уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) y = 0, \quad (17)$$

где $p(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом ω ; $y_1(x)$ — его решение, определенное условиями: $y_1(x_0) = y_0$, $y_1'(x_0) = y_0'$. Показать, что решение $y_2(x)$, удовлетворяющее условиям: $y_2(x_0 + t\omega) = y_0$, $y_2'(x_0 + t\omega) = y_0'$, где t — целое число, удовлетворяет и тождеству $y_2(x + t\omega) = y_1(x)$.

967. (Н. В. Адамов.) Доказать, что если одно решение уравнения (17) имеет два нуля, то все решения имеют бесконечное множество нулей.

7. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вопросы

1. Какой общий вид имеет линейное уравнение n -го порядка? При каком условии задача Коши для линейного уравнения имеет единственное решение? Какова при этом условии степень произвола выбора начальных данных решений линейного уравнения? В каком интервале существуют решения? Может ли график нулевого решения однородного линейного уравнения второго порядка касаться оси Ox ? Может ли он пересекать ось Ox ? Почему линейное уравнение не имеет особых решений?

2. Какие решения однородного линейного уравнения называются линейно независимыми? Что такое фундаментальная система решений? Может ли нулевое решение входить в состав фундаментальной системы решений? Какое условие является необходимым и достаточным для того, чтобы данная система решений была фундаментальной? Сколько фундаментальных систем решений имеет заданное однородное линейное уравнение? Какая фундаментальная система решений называется нормированной в заданной точке?

3. Как построить общее решение однородного линейного уравнения, если известна фундаментальная система решений? В какой области определено общее решение? Как решить задачу Коши с помощью формулы общего решения? Как записать общее решение

в форме Коши, если известна фундаментальная система решений, нормированная в заданной точке?

4. Как найти общее решение неоднородного линейного уравнения, если известно одно частное решение его и общее решение соответствующего однородного уравнения?

5. В чем заключается сущность метода Лагранжа нахождения общего решения неоднородного линейного уравнения?

6. Как построить однородное линейное уравнение, имеющее заданную фундаментальную систему решений?

7. В чем состоит метод Эйлера интегрирования однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами? Как зависит структура фундаментальной системы решений от вида корней характеристического уравнения? В какой области определено общее решение?

8. В каких случаях и в каком виде может быть найдено частное решение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов?

9. Какая замена независимой переменной может привести однородное линейное уравнение n -го порядка общего вида к уравнению с постоянными коэффициентами?

10. Как интегрируется линейное уравнение Эйлера?

11. Как интегрируется уравнение Чебышева? В каком случае одно из частных решений этого уравнения будет полиномом?

12. Какой заменой искомой функции можно избавиться в однородном линейном уравнении второго порядка от члена, содержащего первую производную от искомой функции?

13. Если для однородного линейного уравнения второго порядка известно одно ненулевое частное решение y_1 , то как найти второе частное решение y_2 (т. е. решение, линейно независимое с y_1)?

14. Как найти ненулевое частное решение однородного линейного уравнения второго порядка в виде полинома, если такое решение существует?

15. Как понижается порядок линейного уравнения, не содержащего искомой функции, и линейного уравнения, не содержащего искомой функции и последовательных первых производных? В каком случае такое уравнение всегда интегрируется в квадратурах?

16. Какой подстановкой можно привести однородное линейное уравнение второго порядка к уравнению Риккати?

17. При каком условии однородное линейное уравнение второго порядка будет уравнением в точных производных? Как найти общее решение при выполнении этого условия?

18. Какой вид имеет уравнение Лежандра? Когда одним из его частных решений будет полином?

19. Какой вид имеет уравнение Лягерра? В каком случае одно из его частных решений будет полиномом?

20. Какой вид имеет уравнение Чебышева—Эрмита? В каком случае одно из его частных решений будет полиномом?

21. При каком условии однородное линейное уравнение второго порядка имеет частное решение, удовлетворяющее заданным на-

чальным условиям и представимое в виде степенного ряда по степеням разности $x-x_0$, где x_0 — начальное значение независимой переменной? Как можно выбирать начальное значение искомой функции и ее производной? В чем состоит метод неопределенных коэффициентов, чему равны свободный член и коэффициент при $x-x_0$, как определяются остальные коэффициенты? В какой области сходится ряд, представляющий решение?

22. Как найти общее решение однородного линейного уравнения второго порядка при помощи степенных рядов?

23. При каком условии однородное линейное уравнение второго порядка имеет в окрестности особой точки $x=x_0$ хотя бы одно частное решение в виде обобщенного степенного ряда? Как определяются показатель ρ и коэффициенты степенного ряда, входящего в состав решения? В какой области сходится этот степенной ряд? В каком случае, отыскивая решение в виде обобщенного степенного ряда, получают решение в виде обычного степенного ряда? Как зависит вид второго частного решения от характера корней определяющего уравнения? В каком случае второе частное решение заведомо содержит $\ln(x-x_0)$?

24. Какой вид имеет первое, т. е. соответствующее старшему корню определяющего уравнения, решение уравнения Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ в окрестности особой точки $x=0$?

25. Какой вид имеет общее решение уравнения Бесселя $xy'' + y' + xy = 0$?

26. Какой вид имеет первое решение уравнения Гаусса $x(x-1)y'' + (-\gamma + (1+\alpha+\beta)x)y' + \alpha\beta y = 0$ в окрестности особой точки $x=0$?

Задачи

В задачах 968, 969 доказать, пользуясь теоремой Пикара, существование и единственность решения, удовлетворяющего поставленным начальным условиям; оценить область существования решения.

$$968. y'' + 2xy = 0; y = 2, y' = 3 \text{ при } x = 1.$$

$$969. y'' + \frac{1}{4+x^2} y' - \frac{1}{x-1} y = x; y = 1, y' = 0 \text{ при } x = 0.$$

В задачах 970, 971 доказать, пользуясь теоремой Коши, существование и единственность голоморфного решения, удовлетворяющего поставленным начальным условиям; оценить область сходимости степенного ряда, представляющего решение; найти свободный член и коэффициенты при $x-x_0$, $(x-x_0)^2$ и $(x-x_0)^3$ в разложении решения в ряд по степеням $x-x_0$.

$$970. y'' + 2xy = 0; y = 2, y' = 3 \text{ при } x = 1.$$

$$971. y'' + \frac{1}{x-2} y' + \frac{1}{x^2+1} y = 0; y = 1, y' = 0 \text{ при } x = 0.$$

В задачах 972, 973 найти голоморфное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

$$972. y'' - 2xy' - 2y = 0; y = 1, y' = 0 \text{ при } x = 0.$$

$$973. y'' + \frac{1}{1-x} y' = 0; y = 0, y' = 1 \text{ при } x = 0.$$

В задачах 974, 975 для линейного уравнения найти (пользуясь теоремами Пикара и Коши) и сравнить оценки области существования решения и области сходимости степенного ряда, представляющего решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

$$974. y'' - \frac{1}{1+x^4} y' + \frac{x}{x^2+x+2} y = 0; y = y_0, y' = y'_0 \text{ при } x = 0.$$

$$975. y'' - \frac{1}{1-x} y' + xy = 0; y = y_0, y' = y'_0 \text{ при } x = 2.$$

В задачах 976—978 выяснить, какие начальные данные можно задавать, чтобы задача Коши заведомо имела единственное решение. В каких областях гарантированы существование решения и сходимость степенного ряда, представляющего это решение?

$$976. y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x}{x-1} y = 0.$$

$$977. (x^2 + 1) y'' + 2xy' - y = 0. \quad 978. y''' + xy = 0.$$

В задачах 979—1008 проинтегрировать уравнение.

$$979. y'' - 5y' + 6y = 0.$$

$$980. y'' - 5y' = 0.$$

$$981. y'' + y' + y = 0.$$

$$982. y'' + k^2 y = 0 \quad (k \neq 0).$$

$$983. y'' - 4y' + 4y = 0.$$

$$984. y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

$$985. y''' - 3y'' + 2y' = 0.$$

$$986. y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0.$$

$$987. y^{(4)} + 4y = 0.$$

$$988. y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$$

$$989. y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

$$990. y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0.$$

$$991. y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0.$$

$$992. y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

$$993. y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0.$$

$$994. y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2.$$

$$995. y'' - 5y' = -5x^2 + 2x.$$

$$996. y'' - y = 6e^{2x}.$$

$$997. y'' - y = 2e^x.$$

$$998. y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}.$$

$$999. y'' - 6y' + 5y = -3e^x + 5x^2.$$

$$1000. y'' + y = 6 \cos 2x + 3 \sin 2x. \quad 1001. y'' + y' + y = -13 \sin 2x.$$

$$1002. y'' + y = 2 \sin x.$$

$$1003. y'' - y = e^x x \cos x.$$

1004. $y'' + 4y = x \sin^2 x.$

1005. $y'' + 9y = \cos 2x \cdot \cos 3x.$

1006. $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}.$

1007. $y''' + y' = x \cos^2 x.$

1008. $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = \frac{25}{4} \cos 2x + 8e^x.$

В задачах 1009 — 1025 определить вид частного решения уравнения.

1009. $y'' + y = x.$

1010. $y'' - y' = x.$

1011. $y'' - y = 3e^{2x}.$

1012. $y'' - y = e^x.$

1013. $y'' + 2y' + y = e^{-x}.$

1014. $y'' + y = xe^x.$

1015. $y'' - y = xe^x.$

1016. $y'' - y = e^x + x.$

1017. $y'' - y' = e^x + x.$

1018. $y'' - y = \cos x + \sin 2x.$

1019. $y'' + y = \cos x + \sin 2x.$

1020. $y''' - y' = x.$

1021. $y'' - 4y' + 13y = xe^{2x} \cos 3x.$

1022. $y'' + y = x \sin x.$

1023. $y^{(4)} + y''' = 1.$

1024. $y'' + my = e^{nx}.$

1025. $y'' + py' + qy = a.$

В задачах 1026 — 1029 проинтегрировать уравнение.

1026. $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}.$

1027. $y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}.$

1028. $y''' + y = \frac{x^3 - 6}{x^4}.$

1029. $y''' - 2y'' + y' = \frac{2x^2 + 12x + 24}{x^5}.$

В задачах 1030 — 1040 найти решения уравнения, удовлетворяющие поставленным начальным или граничным условиям.

1030. $y'' - y = 0; y = 1, y' = 0$ при $x = 0.$

1031. $y''' - 5y'' + 6y' + 2y = 0; y = 0, y' = 0, y'' = 0$ при $x = 1.$

1032. $y'' + y = x^2 + 2; y = 1, y' = 0$ при $x = 0.$

1033. $y'' - y' = 2 - 2x; y = 0, y' = 0$ при $x = 0.$

1034. $y'' + y = 0; y = 1$ при $x = 0, y = 1$ при $x = \pi/2.$

1035. $y'' + y = 0; y = 1$ при $x = 0, y = 2$ при $x = \pi.$

1036. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0; x = x_0, \frac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0.$

1037. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0; x = x_0, \frac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0.$

1038. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 3 \sin 2t; x = 0, \frac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0.$

1039. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 2 \sin t; x = 0, \frac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0.$

$$1040. \frac{d^2x}{dt^2} + x - 2 \sin t; x = 0, \frac{dx}{dt} = 1 \text{ при } t = 0.$$

В задачах 1041—1048 уравнение привести к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены независимой переменной и проинтегрировать его.

$$1041. x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

$$1042. x^2 y'' - xy' + y = 0.$$

$$1043. x^2 y'' + xy' + y = 0.$$

$$1044. x^2 y'' - 3y' + 13y = 0.$$

$$1045. (1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

$$1046. (1-x^2)y'' - xy' + 2y = 0.$$

$$1047. (1-x^2)y'' - xy' + y = 0. \quad 1048. y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{x^2}{(1-x^2)^2}y = 0.$$

В задачах 1049, 1050 избавиться от коэффициента при производной первого порядка путем замены искомой функции и проинтегрировать полученное уравнение.

$$1049. y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0.$$

$$1050. x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0.$$

В задачах 1051—1054 найти общее решение уравнения, допускающего частные решения в виде полинома.

$$1051. (3x^3 - x)y'' - 2y' - 6xy = 0.$$

$$1052. x(x+2)y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0.$$

$$1053. y'' + xy' - y = 0.$$

$$1054. y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

В задачах 1055—1057 найти в виде рядов по степеням x фундаментальную систему решений, нормированную в точке $x=0$, и построить общее решение.

$$1055. y'' + xy = 0.$$

$$1056. (1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

$$1057. ((1+x^2)\cos x - 2x \sin x)y'' + (x^2+3)\sin x \cdot y' - 2(x \sin x + \cos x)y = 0.$$

В задачах 1058—1060 найти в виде ряда по степеням x одно частное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям, просуммировать этот ряд, найти второе частное решение и построить общее решение.

$$1058. y'' + xy' + y = 0; y_1 = 1, y'_1 = 0 \text{ при } x = 0.$$

$$1059. (1-x^2)y'' - xy' + \frac{1}{4}y = 0; y_1 = 1, y'_1 = \frac{1}{2} \text{ при } x = 0.$$

$$1060. (\cos x + \sin x)y'' - 2 \cos x \cdot y' + (\cos x - \sin x)y = 0; y_1 = 1, y'_1 = 1 \text{ при } x = 0.$$

V. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

Нормальные системы. Нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет следующий общий вид:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1)$$

где y_i , $i = \overline{1, n}$, — неизвестные функции от независимой переменной x , подлежащие определению; f_i , $i = \overline{1, n}$, — известные функции от $x, y_1, y_2, \dots, y_n$, заданные и непрерывные в некоторой области. Число n называется *порядком* системы (1).

Если правые части системы (1) являются линейными функциями от $y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$\frac{dy_i}{dx} = p_{i1}(x)y_1 + p_{i2}(x)y_2 + \dots + p_{in}(x)y_n + f_i(x) \quad (i = \overline{1, n}),$$

то такая система называется *линейной*.

Совокупность n функций

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x), \quad (2)$$

определенных и непрерывно дифференцируемых в интервале (a, b) , называется *решением* системы (1) в интервале (a, b) , если функции (2) обращают уравнения системы (1) в тождества, справедливые при всех значениях x из (a, b) . Кривая в $(n+1)$ -мерном пространстве $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, соответствующая решению (2), называется *интегральной кривой*.

Задача нахождения решения $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$, удовлетворяющего *начальным условиям*:

$$y_1 = y_1^{(0)}, y_2 = y_2^{(0)}, \dots, y_n = y_n^{(0)} \quad \text{при } x = x_0,$$

где $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ — заданные числа (*начальные данные*), называется *задачей Коши (начальной задачей)*.

Для существования решения задачи Коши достаточно, чтобы правые части системы (1) были непрерывны в окрестности начальной точки $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ (теорема Пеано).

Чтобы гарантировать не только существование, но и единственность решения задачи Коши, достаточно, согласно теореме

Пикара, предположить дополнительно, что правые части системы (1) удовлетворяют условию Липшица относительно $y_1, y_2, \dots, y_n$ в некоторой окрестности начальной точки $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$, в частности имеют в этой окрестности ограниченные частные производные по $y_1, y_2, \dots, y_n$. Например, это будет справедливо, если правые части системы (1) являются полиномами относительно всех своих аргументов или хотя бы относительно $y_1, y_2, \dots, y_n$ в предположении, что все коэффициенты этих полиномов — непрерывные функции от x . При этом $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ можно задавать совершенно произвольно, а x_0 можно выбирать любым только в первом случае, в то время как во втором случае x_0 должно лежать в интервале непрерывности коэффициентов системы.

Совокупность n функций

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (3)$$

определенных в некоторой области изменения переменных $x, C_1, C_2, \dots, C_n$ и имеющих частные производные по x , называется *общим решением* системы (1) в области D изменения переменных $x, y_1, y_2, \dots, y_n$, в каждой точке которой имеет место существование и единственность решения задачи Коши, если:

1) система уравнений (3) разрешима в области D относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, так что мы имеем:

$$C_i = \psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = \overline{1, n}); \quad (4)$$

2) совокупность функций (3) является решением системы (1) при всех значениях произвольных постоянных, доставляемых формулами (4), когда точка $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ пробегает область D .

Чтобы найти решение системы (1) с начальными данными $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ из области D при помощи формулы общего решения (3), поступают так:

1) подставляют в систему (3) вместо $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ соответственно числа $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$:

$$y_i^{(0)} = \varphi_i(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (i = \overline{1, n}); \quad (5)$$

2) решают систему (5) относительно $C_1, C_2, \dots, C_n$, находят $C_1 = C_1^{(0)}, C_2 = C_2^{(0)}, \dots, C_n = C_n^{(0)}$;

3) подставляя найденные значения произвольных постоянных в формулу (3), получают искомое решение

$$y_i = \varphi_i(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}) \quad (i = \overline{1, n}).$$

Оно будет единственным.

Общее решение вида

$$y_i = y_i(x, x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \quad (i = \overline{1, n}),$$

в котором роль произвольных постоянных играют начальные значения $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ искомых функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ при фиксированном значении x_0 независимой переменной x , называется *общим решением в форме Коши*.

Решение (2), в каждой точке которого имеет место существование и единственность решения задачи Коши, называется *частным решением*. Так, решение, получающееся из общего решения в области D при конкретных (допустимых) числовых значениях произвольных постоянных (включая $\pm\infty$), будет частным решением.

Если в каждой точке решения нарушается единственность решения задачи Коши, то оно называется *особым*.

Функция $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ (которую мы будем предполагать непрерывно дифференцируемой и не сводящейся к постоянной) называется *интегралом* системы (1), если она тождественно обращается в постоянную вдоль любого частного решения. Отсюда следует, что $d\psi \equiv 0$ в силу системы (1), т. е.

$$d\psi|_{(1)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1 dx + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n dx \equiv 0.$$

Нормальная система n уравнений не может иметь более чем n независимых интегралов. Так что если $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ суть независимые интегралы системы (1), то всякий другой интеграл ψ этой же системы будет функцией от $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$.

Равенство $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C$ называется *первым интегралом системы (1)*. Совокупность n независимых первых интегралов системы (1) называется *общим интегралом* этой системы. (Первые интегралы называются *независимыми*, если входящие в них интегралы независимы.)

При интегрировании данной системы стараются (смотря по тому, что удобнее) найти общее решение или общий интеграл.

Если, интегрируя нормальную систему n -го порядка, мы получаем семейство интегральных кривых, зависящее от произвольных постоянных, в виде, не разрешенном ни относительно произвольных постоянных, ни относительно искомых функций, то это семейство мы также будем называть *общим интегралом* этой системы.

В общем случае мы располагаем очень ограниченными возможностями интегрирования в квадратурах (см. § 2).

В дальнейшем будет показано, что для линейных систем эти возможности несколько шире (см. гл. VI). Но фактически всегда удается найти в квадратурах общее решение или общий интеграл только в случае, когда коэффициенты линейной системы являются постоянными. Решения линейной системы с переменными коэффициентами во многих случаях удается найти с помощью степенных рядов. Для интегрирования линейных систем применяется также матричный метод.

Системы дифференциальных уравнений в симметрической форме. Система вида

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (6)$$

называется *системой дифференциальных уравнений в симметрической форме*. Если в точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ хотя бы один из знаменателей $X_1, X_2, \dots, X_n$ отличен от нуля, то в окрестности этой точки систему (6) можно заменить нормальной системой $n-1$ уравнений. Пусть, например, $X_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0$. Тогда система (6) равносильна следующей нормальной системе:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \quad \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}. \quad (7)$$

Каждый интеграл (первый интеграл) системы (7) называется *интегралом (первым интегралом)* системы (6). Система (6) имеет не более чем $n-1$ независимых интегралов (первых интегралов). Совокупность $n-1$ независимых первых интегралов системы (6) будем называть *общим интегралом* этой системы.

Всякую нормальную систему (1) можно записать в виде системы в симметрической форме

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1}.$$

Механическое истолкование нормальной системы. Устойчивость решения (движения). Рассмотрим нормальную систему вида

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (8)$$

где t — время; $x_1, x_2, \dots, x_n$ — координаты точки n -мерного пространства (*фазового пространства*) $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. В случае $n=2$ это пространство есть плоскость (x_1, x_2) (*фазовая плоскость*).

Всякое решение

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \dots, \quad x_n = x_n(t) \quad (9)$$

системы (8) называется *движением*, определяемым этой системой, а путь, описываемый движущейся точкой в фазовом пространстве (на фазовой плоскости), — *траекторией* этого движения.

Система (8) задает некоторое *поле скоростей*, а именно — поле скоростей движений, определяемых этой системой. Задача интегрирования системы состоит в том, чтобы по этому полю восстановить сами движения.

Задача Коши для системы (8) заключается в нахождении решения (движения) (9), удовлетворяющего *начальным условиям*:

$$x_1 = x_1^{(0)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \quad \dots, \quad x_n = x_n^{(0)} \quad \text{при } t = t_0, \quad (10)$$

где $t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ — заданные числа (*начальные данные*), т. е. ищется такое движение (9), при котором движущаяся точка находится в заданной точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ фазового пространства в заданный момент времени t_0 .

В случае, когда в начальной точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ правые части системы (8) обращаются в нуль при всех рассматриваемых значениях времени t , система (8) определяет движение вида

$$x_1 \equiv x_1^{(0)}, x_2 \equiv x_2^{(0)}, \dots, x_n \equiv x_n^{(0)}. \quad (11)$$

Такое движение называется *состоянием покоя*. Траектория движения (11) представляет собой точку $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, которая называется *точкой покоя* или *точкой равновесия* системы (8).

Если система (8) — *автономная (стационарная)*, т. е. ее правые части не зависят явно от t :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (12)$$

то траекториями движений, определяемых этой системой, являются интегральные кривые *соответствующей системы в симметрической форме*:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

и точки покоя самой системы (12).

В частности, траекториями движений, определяемых системой

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by \end{aligned} \right\} \quad (ad - bc \neq 0),$$

будут интегральные кривые уравнения

$$\frac{dx}{cx + dy} = \frac{dy}{ax + by} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}$$

и начало координат $x=0, y=0$.

При выполнении условий теоремы Пикара решение (движение) (9), определяемое системой (8) и начальными условиями (10), является непрерывной функцией начальных данных $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$. При этом интеграл изменения времени предполагается *конечным*.

В тех случаях, когда непрерывная зависимость решения (движения) от начальных данных имеет место равномерно относительно времени t на всем *полу бесконечном* интервале изменения t ($t \geq t_0$), говорят, что решение (движение) (9) обладает свойством *устойчивости* при $t \rightarrow +\infty$.

Предположим, что правые части системы (8) обращаются в нуль при всех рассматриваемых значениях времени t ($t \geq t_0$). Тогда система (8) определяет *нулевое решение*

$$x_1 \equiv 0, x_2 \equiv 0, \dots, x_n \equiv 0. \quad (13)$$

Это решение удовлетворяет *нулевым начальным условиям*:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0 \text{ при } t = t_0.$$

Решение (13) называется *невозмущенным решением*, а соответствующее ему движение — *невозмущенным движением*.

Всякое решение (9), удовлетворяющее начальным условиям (10) где хотя бы одно из начальных данных $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ отличны от нуля, называется *возмущенным решением*, соответствующее ему движение — *возмущенным движением*, а числа $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ — *возмущениями*.

Нулевое решение (13) называется *устойчивым в смысле Ляпунова*, когда все возмущенные решения (9), соответствующие достаточно малым возмущениям $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, будут при всех значениях $t \geq t_0$ находиться в сколь угодно малой окрестности невозмущенного решения, т. е. если по любому положительному числу $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое положительное число $\delta > 0$, что из неравенств

$$|x_1^{(0)}| < \delta, |x_2^{(0)}| < \delta, \dots, |x_n^{(0)}| < \delta \quad (14)$$

следуют неравенства

$$|x_1(t)| < \varepsilon, |x_2(t)| < \varepsilon, \dots, |x_n(t)| < \varepsilon \text{ при всех } t \geq t_0. \quad (15)$$

Если хотя бы для одного $\varepsilon > 0$ не существует соответствующего $\delta > 0$, то решение (13) называется *неустойчивым*.

Решение (13) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и, кроме того,

$$x_1(t) \rightarrow 0, x_2(t) \rightarrow 0, \dots, x_n(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

Если решение (13) неустойчиво, но при дополнительном условии вида

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \geq 0, f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

из выполнения неравенств (14) следует выполнение неравенств (15), то решение (13) называется *условно устойчивым*.

Судить о наличии (или отсутствии) устойчивости нулевого решения (13) легче всего в тех случаях, когда известно общее решение в форме Коши.

Проще всего рассматривать вопрос об устойчивости нулевого решения в случае однородной линейной системы с постоянными коэффициентами (см. гл. VI, § 2).

Канонические системы дифференциальных уравнений высших

порядков. Система дифференциальных уравнений высших порядков, разрешенная относительно старших производных, называется *канонической*. Она имеет вид

$$\begin{aligned} y_i^{(m_i)} = f_i(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_n, \\ y_n', \dots, y_n^{(m_n-1)}) \quad (i = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (16)$$

Число $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ называется *порядком* системы (16).

Совокупность n функций

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x), \quad (17)$$

имеющих непрерывные производные соответствующих порядков, называется *решением* системы (16) в интервале (a, b) , если эти функции обращают уравнения системы (16) в тождества, справедливые для всех значений x из (a, b) .

Каноническая система (16), так же как и одно уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

приводится к *соответствующей ей нормальной системе* уравнений, если принять все производные, стоящие справа, за новые неизвестные функции.

Задача Коши для канонической системы (16) состоит в нахождении решения (17), в котором искомые функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ вместе со своими производными до порядков соответственно $m_1-1, m_2-1, \dots, m_n-1$ принимают наперед заданные числовые значения при заданном значении x .

Общее решение канонической системы (16) содержит $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ произвольных постоянных.

2. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Последовательное интегрирование. Если система дифференциальных уравнений состоит из n уравнений первого порядка, каждое из которых содержит только одну неизвестную функцию, т. е. имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_2), \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_n), \end{aligned} \right\}$$

то ее интегрирование сводится к интегрированию каждого из уравнений в отдельности.

В случае, когда система имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n),\end{aligned}$$

ее интегрирование выполняется последовательно: нужно проинтегрировать первое уравнение, подставить найденное общее решение во второе уравнение, проинтегрировать его и т. д.

В частности, таким путем всегда может быть проинтегрирована в квадратурах линейная система вида

[illegible]

Метод исключения. Многие нормальные системы удается проинтегрировать путем предварительного приведения данной системы n -го порядка к одному уравнению n -го порядка с одной неизвестной функцией или к нескольким таким уравнениям, причем сумма их порядков равна n . Это приведение системы к одному уравнению n -го порядка (если оно возможно) достигается последовательным дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных функций, кроме одной (*метод исключения*). Проинтегрировав полученное уравнение, находят общее решение данной системы уже без новых квадратур.

Каноническая система дифференциальных уравнений порядка $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ также во многих случаях может быть проинтегрирована методом исключения, ибо она, вообще говоря, приводится к одному уравнению порядка $m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

Интегрируемые комбинации. Задача интегрирования данной системы дифференциальных уравнений значительно облегчается, если удастся найти один или несколько независимых первых интегралов системы, ибо тогда можно понизить порядок системы (см. ниже, пример 2).

Первые интегралы во многих случаях находят путем построения *интегрируемых комбинаций*, т. е. легко интегрируемых дифферен-

циальных уравнений, полученных из данной системы путем несложных преобразований. Для нахождения интегрируемых комбинаций иногда бывает полезно предварительно переписать данную систему в симметрической форме.

Если для системы, состоящей из n уравнений, найдено n независимых первых интегралов, то тем самым получен общий интеграл этой системы и ее интегрирование окончено.

Интегрирование систем, правые части которых удовлетворяют условиям Коши — Римана (Д'Аламбера — Эйлера). Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= v(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Предположим, что функции u и v непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогда функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy)$$

будет регулярной функцией от комплексной переменной z . Например, если $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, то $u + iv = z^2 \equiv f(z)$.

Умножая второе уравнение системы (1) на i и складывая почленно с первым, получаем

$$\frac{dz}{dt} = f(z) \quad \left(\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right). \quad (2)$$

Это уравнение будем называть *комплексным дифференциальным уравнением, соответствующим системе (1)*.

Интегрируя уравнение (2) и отделяя в общем решении вещественные и мнимые части, находим общее решение системы (1).

Для системы (1), правые части которой удовлетворяют условиям Коши—Римана, можно найти решение $x = x(t)$, $y = y(t)$, удовлетворяющее начальным условиям: $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = t_0$, не пользуясь формулами общего решения данной системы. Для этого достаточно заменить систему (1) равносильным ей уравнением (2), найти решение $z = z(t)$ последнего уравнения, удовлетворяющее начальному условию $z = z_0$ ($z_0 = x_0 + iy_0$) при $t = t_0$, и отделить в нем вещественную и мнимую части.

Примеры. 1. Для системы

$$y' = 1 - \frac{1}{z}, \quad z' = \frac{1}{y - x} \quad (3)$$

найти общее решение и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = -1, \quad z = 1 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (4)$$

Будем искать общее решение системы (3) методом исключения. Дифференцируем второе уравнение:

$$z'' = -\frac{1}{(y-x)^2} (y' - 1).$$

Чтобы исключить из полученного уравнения y и y' , заменим в нем $\frac{1}{y-x}$ и $y' - 1$ их значениями из данной системы. Получим

$$z'' = z'^2 \frac{1}{z}. \quad (5)$$

Интегрируем уравнение (5):

$$\frac{z''}{z'} = \frac{z'}{z}, \quad z' = C_1 z,$$

откуда $z = C_2 e^{C_1 x}$.

Для нахождения y воспользуемся вторым из уравнений (3) и полученным значением z :

$$y - x = \frac{1}{z'}, \quad y - x = \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x},$$

откуда

$$y = x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}.$$

Общим решением системы (3) будет

$$\left. \begin{aligned} y &= x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}, \\ z &= C_2 e^{C_1 x}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Решим теперь поставленную задачу Коши. Подставим в систему (6) вместо x , y и z их начальные значения 0, -1 и 1 : $-1 = 1/(C_1 C_2)$, $1 = C_2$, откуда $C_1 = -1$, $C_2 = 1$, поэтому искомым решением будет

$$y = x - e^x, \quad z = e^{-x}.$$

Других решений, удовлетворяющих начальным условиям (4), нет (почему?).

2. Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x. \quad (7)$$

Найдем ее общий интеграл методом интегрируемых комбинаций и понижения порядка системы.

Умножая почленно уравнения системы (7) соответственно на x и y и складывая полученные уравнения, находим интегрируемую комбинацию

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0,$$

откуда

$$x^2 + y^2 = C_1^2. \quad (8)$$

З а м е ч а н и с. Этот же первый интеграл можно получить из интегрируемой комбинации $dy/dx = -x/y$, к которой мы придем, если почленно разделим второе уравнение системы (7) на первое.

Пользуясь найденным первым интегралом (8), понизим порядок данной системы (7). Решим уравнение (8) относительно y (ограничимся положительными значениями y): $y = \sqrt{C_1^2 - x^2}$. Подставим это значение y в первое из уравнений системы (7). Получим уравнение первого порядка с одной неизвестной функцией x :

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{C_1^2 - x^2}. \quad (9)$$

Интегрируя уравнение (9), находим

$$\arcsin \frac{x}{C_1} = t + C_2.$$

Заменяем C_1 его значением из выражения (8) и переносим t в левую часть:

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - t = C_2. \quad (10)$$

Это первый интеграл данной системы. При этом очевидно, что первые интегралы (8) и (10) независимы, так что их совокупность образует общий интеграл системы (7).

3. Найдти общий интеграл системы

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}. \quad (11)$$

Построим две интегрируемые комбинации, пользуясь свойством ряда равных отношений. Складывая в системе (11) числители и знаменатели дробей, можем записать:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx + dy + dz}{0},$$

откуда

$$dx + dy + dz = 0 \quad \text{или} \quad d(x + y + z) = 0;$$

следовательно,

$$x + y + z = C_1. \quad (12)$$

Теперь умножим в системе (11) числители и знаменатели дробей соответственно на $2x$, $2y$, $2z$ и сложим числители и знаменатели полученных дробей. Тогда

$$\frac{2xdx}{2x(z-y)} = \frac{2ydy}{2y(x-z)} = \frac{2zdz}{2z(y-x)} = \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{0},$$

откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2. \quad (13)$$

Первые интегралы (12), (13) образуют общий интеграл системы (11).

4. Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2}. \quad (14)$$

Для нахождения интегрируемых комбинаций целесообразно переписать систему (14) в симметрической форме:

$$\frac{dy}{z/(z-y)^2} = \frac{dz}{y/(z-y)^2} = \frac{dx}{1}.$$

Умножим все знаменатели на $(z - y)^2$:

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} = \frac{dx}{(z - y)^2}. \quad (15)$$

Одной из интегрируемых комбинаций будет $dy/z = dz/y$, откуда

$$y^2 - z^2 = C_1^2.$$

Для получения второй интегрируемой комбинации вычтем в системе (15) из числителя и знаменателя первой дроби соответственно числитель и знаменатель второй дроби:

$$\frac{d(y - z)}{z - y} = \frac{dx}{(z - y)^2}.$$

Отсюда находим второй первый интеграл

$$2x + (y - z)^2 = C_2.$$

Интегрирование системы (14) закончено.

5. Найти независимые интегралы системы

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0}.$$

Имеем

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}, \quad xy = C_1; \quad dz = 0, \quad z = C_2.$$

Следовательно,

$$\psi_1 = xy, \quad \psi_2 = z.$$

6. Найти независимые интегралы системы

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}.$$

Интегрируя равенство $dz = 0$, находим $z = C_1$. Подставляя это значение z в $dx/z = dy/y$, имеем $dx/C_1 = dy/y$, откуда $y = C_2 e^{x/C_1}$. Поэтому

$$\psi_1 = z, \quad \psi_2 = ye^{-x/z}.$$

7. Найти общее решение системы

$$\left. \begin{aligned} y'' - z &= 0, \\ z'' - y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 1, \quad y' = 1, \quad z = 1, \quad z' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (17)$$

Для нахождения общего решения воспользуемся методом исключения. Дифференцируя два раза первое из уравнений (16) и заменяя z'' ее значением из второго уравнения, получаем $y^{(4)} - y = 0$. Это уравнение имеет общее решение

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Так как $z = y''$, то

$$z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

Общим решением системы (16) будет

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \\ z &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x. \end{aligned} \right\}$$

Чтобы выделить из него решение, удовлетворяющее начальным условиям (17), подставим в систему

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \\ y' &= C_1 e^x - C_2 e^{-x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x, \\ z &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x, \\ z' &= C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \sin x - C_4 \cos x \end{aligned} \right\}$$

вместо x, y, y', z, z' их начальные значения 0, 1, 1, 1, 0. Получим

$$\left. \begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 + C_3, \\ 1 &= C_1 - C_2 + C_4, \\ 1 &= C_1 + C_2 - C_3, \\ 0 &= C_1 - C_2 - C_4. \end{aligned} \right\}$$

откуда $C_1 = 3/4, C_2 = 1/4, C_3 = 0, C_4 = 1/2$, так что искомым решением будет

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{3}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x, \\ z &= \frac{3}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x. \end{aligned} \right\}$$

Других решений, удовлетворяющих начальным условиям (17), нет (почему?).

8. Найти общее решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= px - qy, \\ \frac{dy}{dt} &= qx + py. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Правые части этой системы удовлетворяют условиям Коши — Римана. Умножая второе уравнение на i и складывая почленно с первым, получаем

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z \quad (\lambda = p + iq). \quad (19)$$

Интегрируя это уравнение, находим $z = Ce^{\lambda t}$ ($C = C_1 + iC_2$). Отделив вещественные и мнимые части, получим общее решение системы (18) в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{pt} (C_1 \cos qt - C_2 \sin qt), \\ y &= e^{pt} (C_1 \sin qt + C_2 \cos qt). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

9. Для системы (18) найти решение $x = x(t), y = y(t)$, удовлетворяющее начальным условиям: $x = 1, y = 0$ при $t = 0$.

Так как система (18) равносильна уравнению (19), то достаточно найти решение $z = z(t)$ уравнения (19), удовлетворяющее начальному условию $z = 1$ при $t = 0$ (почему?). Это решение имеет вид $z = e^{\lambda t}$. Отделяя вещественные и мнимые части, получаем:

$$\left. \begin{aligned} x &= e^{pt} \cos qt, \\ y &= e^{pt} \sin qt. \end{aligned} \right\}$$

Это и есть искомое решение. Заметим, что оно содержится в формуле общего решения (20) при $C_1=1$, $C_2=0$.

В задачах 1061—1078 проинтегрировать систему дифференциальных уравнений.

$$1061. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2xy^2, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{z-x}{x}. \end{cases}$$

$$1062. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = e^{x-y}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{2x-z^2}. \end{cases}$$

$$1063. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} y, \\ \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x} z + y + x. \end{cases}$$

$$1064. \begin{cases} xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}, \\ z' = \frac{y+z}{z^2 - x}. \end{cases}$$

$$1065. \begin{cases} y_1' = 4y_1, \\ y_2' = 4y_2 + 2y_3, \\ y_3' = 4y_3, \\ y_4' = y_1 + 3y_4, \\ y_5' = y_4 + 3y_5. \end{cases}$$

$$1066. \begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 4y_2 + 2y_3, \\ y_3' = 4y_3, \\ y_4' = 3y_4, \\ y_5' = 3y_5 + 3y_4, \\ y_6' = 5y_6. \end{cases}$$

$$1067. \begin{cases} y' = z, \\ z' = z^2/y. \end{cases}$$

$$1068. \begin{cases} y' = y + z, \\ z' = -5y - 5z. \end{cases}$$

$$1069. \begin{cases} y' = y + z, \\ z' = \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} - 1\right)y + \left(\frac{2}{x} - 1\right)z. \end{cases}$$

$$1070. \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

$$1071. \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{mu}.$$

$$1072. \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{1/2}.$$

$$1073. \frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z}.$$

$$1074. \frac{dx}{y} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z}.$$

$$1075. \frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}.$$

$$1076. \begin{cases} y' = (z + e^y)/(z + e^x), \\ z' = (z^2 - e^{x+y})/(z + e^x). \end{cases}$$

1077. $y'' = y^2 + z$, $z' = -2yy' + y$. Выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 1$, $y' = 1$, $z = 0$ при $x = 0$.

$$1078. \begin{cases} y'' = y' + z, \\ z' = \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 \right) y' - \left(\frac{1}{x} + 1 \right) z - \frac{2}{x^3} y. \end{cases}$$

В задачах 1079—1084 найти независимые интегралы системы уравнений.

$$1079. \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z}, \quad 1080. \frac{dx}{\cos y} = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dz}{\cos x \cos y}.$$

$$1081. \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y}, \quad 1082. \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}.$$

$$1083. \frac{dx}{z(x+z)} = \frac{dy}{-y(y+z)} = \frac{dz}{0}.$$

$$1084. \frac{dx}{1} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{-26y-z}.$$

В задачах 1085—1090 привести дифференциальное уравнение или систему дифференциальных уравнений высших порядков к соответствующей нормальной системе.

$$\bullet 1085. xy'' + y' + xy = 0. \quad \bullet 1086. \frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

$$\bullet 1087. y''' - y = 0. \quad \bullet 1088. y^{(4)} + x^2y = 0.$$

$$\bullet 1089. \begin{cases} y'' - z = 0 \\ x^3z' - 2y = 0. \end{cases} \quad \bullet 1090. \begin{cases} y'' - z = 0, \\ z'' + y = 0. \end{cases}$$

1091. Проинтегрировать систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + \alpha x^2 + 2\beta xy - \alpha y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - \beta x^2 + 2\alpha xy + \beta y^2 \end{aligned} \right\}$$

и определить тип точки равновесия $x=0, y=0$. (Указание.) Правые части системы удовлетворяют условиям Коши—Римана.)

1092. Найти решение системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{2}(x^3 - 3xy^2), \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{1}{2}(3x^2y - y^3), \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x=1, y=0$ при $t=1$. (Указание. Правые части системы удовлетворяют условиям Коши—Римана.)

В задачах 1093—1095 для системы уравнений найти общее решение и движение (решение), удовлетворяющее поставленным начальным условиям; выяснить, будет ли траектория найденного движения *целой*, т. е. продолжимо ли оно на все значения t от $-\infty$ до $+\infty$.

$$1093. \quad \frac{dx}{dt} = x^2 - y^2, \quad \frac{dy}{dt} = 2xy; \quad x = -1, \quad y = 0 \quad \text{при} \quad t = 1.$$

$$1094. \quad \frac{dx}{dt} = -x^2 + y^2, \quad \frac{dy}{dt} = -2xy; \quad x = 0, \quad y = 1 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

$$1095. \quad \frac{dx}{dt} = e^{-x} \cos y, \quad \frac{dy}{dt} = -e^{-x} \sin y; \quad x = 1, \quad y = 0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

1096. (Н. В. Адамов.) Дано уравнение Риккати

$$y' = y^2 + q(x). \quad (21)$$

Пусть $y = u(x) + iv(x)$ — комплексное решение этого уравнения. Записать систему дифференциальных уравнений, определяющих функции $u(x)$ и $v(x)$.

1097. (Н. В. Адамов.) Показать, что решение уравнения (21), определяемое условием $y(x_0) = m + in$ ($n \neq 0$), не принимает вещественных значений ни при каких значениях независимой переменной x .

1098. (Н. П. Еругин.) Найти все системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y), \end{aligned} \right\}$$

имеющие заданную траекторию $w(x, y) = 0$ (см. [8, п. 115]), и все системы, для которых окружность $x^2 + y^2 - 1 = 0$ является траекторией.

3. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вопросы

1. Какой общий вид имеет нормальная система дифференциальных уравнений? Что называется ее порядком? Когда эта система называется линейной? Что называется решением (интегральной кривой) нормальной системы n -го порядка?

2. Как ставится задача Коши для нормальной системы? В каком случае она имеет решение? Когда это решение будет заведомо единственным?

3. Что такое общее решение нормальной системы n -го порядка?

Как решается задача Коши с помощью формулы общего решения? Что называется общим решением в форме Коши?

4. Какое решение называется частным; особым? В каком случае нормальная система заведомо не имеет особых решений?

5. Что называется интегралом нормальной системы? Сколько независимых интегралов может иметь нормальная система n -го порядка?

6. Что такое первый интеграл нормальной системы? Какие первые интегралы называются независимыми? Что такое общий интеграл нормальной системы n -го порядка?

7. Что такое система дифференциальных уравнений в симметрической форме? Что называется ее интегралом; первым интегралом; общим интегралом?

8. В чем состоит механическое истолкование нормальной системы и ее решения? В чем состоит механическое истолкование задачи Коши? Что такое точка равновесия? Чем отличается поле скоростей, задаваемое автономной системой, от поля скоростей, задаваемого нормальной системой общего вида? Как найти траектории движений, определяемых автономной системой?

9. Когда пулевое решение называется устойчивым (неустойчивым, асимптотически устойчивым, условно устойчивым) в смысле Ляпунова?

10. Какой вид имеет каноническая система дифференциальных уравнений высших порядков? Как ставится задача Коши для канонической системы? Сколько произвольных постоянных содержит общее решение этой системы?

11. В каком случае систему дифференциальных уравнений можно проинтегрировать путем последовательного интегрирования уравнений, входящих в ее состав? В чем состоит метод исключения? Что такое метод интегрируемых комбинаций? Как привести одно уравнение высшего порядка или каноническую систему дифференциальных уравнений высших порядков к нормальной системе уравнений?

Задачи

В задачах 1099, 1100 доказать, пользуясь теоремой Пикара, существование и единственность решения, удовлетворяющего поставленным начальным условиям; оценить интервал существования решения; построить второе приближение к искомому решению (по методу Пикара).

1099. $y' = x + y - z^2$, $z' = yz + 1$; $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$; $y = 0$, $z = 0$ при $x = 0$.

1100. $y' = x^2 - y^2 + z$, $z' = y + z^2 - 1$; $|x| \leq 2$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$; $y = 0$, $z = 0$ при $x = 0$.

В задачах 1101, 1102 найти методом Пикара решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

1101. $y' = y + z - x^2$, $z' = y^2 + 2x - e^{2x}$; $y = 1$, $z = 0$ при $x = 0$.

1102. $y' = y + z + \cos x - \sin x - x$, $z' = y^2 + \cos^2 x$; $y = 0$, $z = 0$ при $x = 0$.

В задачах 1103, 1104 доказать, пользуясь теоремой Коши, существование и единственность голоморфного решения, удовлетворяющего поставленным начальным условиям; оценить область сходимости степенных рядов, представляющих решение; найти свободные члены и коэффициенты при $x - x_0$, $(x - x_0)^2$ и $(x - x_0)^3$ в разложении решения в ряды по степеням $x - x_0$.

1103. $y' = x + y - z^2$, $z' = yz + 1$; $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$; $y = 0$, $z = 0$ при $x = 0$.

1104. $y' = y^2 + z^2 - x^2$, $z' = y + \frac{x-1}{x-2}$; $y = 1$, $z = 1$ при $x = 1$.

В задачах 1105, 1106 найти голоморфное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

1105. $y' = y^2 + z - x$, $z' = y + \frac{x}{x-1}$; $y = 1$, $z = 0$ при $x = 0$.

1106. $y' = 1/z$, $z' = y - z - e^x$; $y = 1$, $z = 1$ при $x = 0$.

В задачах 1107, 1108 найти методом Пикара второе приближение к решению, удовлетворяющему поставленным начальным условиям.

1107. $y'' + yy' - y^2 + x = 0$; $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|y'| \leq 1$; $y = 1$, $y' = 2$ при $x = 0$.

1108. $y'' = x^2 + y^2$; $|x| \leq 2$, $|y| \leq 2$, $|y'| \leq 1$; $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

В задачах 1109, 1110 найти методом Пикара решение, удовлетворяющее начальным условиям.

1109. $y'' = y'^2 - yy' + e^x$; $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

1110. $y'' = y'^2 + y^2 - \sin x - 1$; $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 0$.

В задачах 1111—1116 проинтегрировать систему уравнений и, где указано, выделить решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям, доказав предварительно, что искомое решение существует и единственно.

$$1111. \begin{cases} y - xy' = y^2, \\ z' = \frac{2xz}{x^2 - z^2}. \end{cases}$$

$$1112. \begin{cases} y' = (x - y) \operatorname{tg} x + 1, \\ \left(\frac{1}{z} - x \right) z' = y + z. \end{cases}$$

$$1113. \frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}. \quad 1114. \begin{cases} y'' - z = 0, \\ x^2 z' - 2y = 0. \end{cases}$$

1115. $y' = yz$, $z' = -z^2 + z/x$; $y = 1$, $z = 2$ при $x = 1$.

1116. $y' = -z$, $z' = z^2/y$; $y = 1$, $z = -1/2$ при $x = 1$.

VI. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

Однородные системы. Линейные системы можно проинтегрировать общими методами (см. гл. V, § 2), но для них существует и специальная теория интегрирования, основанная на некоторых замечательных свойствах этих систем и их решений.

Линейная система имеет вид

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l + f_k(x) \quad (k = \overline{1, n}). \quad (1)$$

Если при всех рассматриваемых значениях x все $f_k(x)$ равны нулю, то эта система называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*.

Предполагаем, что функции $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ ($k, l = \overline{1, n}$) определены и непрерывны в интервале (a, b) . Тогда система (1) имеет единственное решение $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$, определенное во всем интервале (a, b) и удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1 = y_1^{(0)}, y_2 = y_2^{(0)}, \dots, y_n = y_n^{(0)} \text{ при } x = x_0,$$

причем начальные данные $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ можно задавать совершенно произвольно, а x_0 нужно брать из интервала (a, b) (почему?).

Всякое решение линейной системы является частным, так что *особых решений она не имеет* (почему?).

Интегрирование неоднородной линейной системы (1), как будет показано ниже, приводится к интегрированию однородной системы

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) y_l \quad (k = \overline{1, n}). \quad (2)$$

Однородная линейная система всегда имеет *нулевое* решение $y_1 \equiv 0$, $y_2 \equiv 0$, ..., $y_n \equiv 0$. Оно удовлетворяет *нулевым* начальным условиям

$$y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0 \text{ при } x = x_0.$$

Других решений, удовлетворяющих нулевым начальным условиям, нет.

Для построения общего решения однородной линейной системы (2) достаточно знать n *линейно независимых* в интервале (a, b) (и тем самым *ненулевых*) частных решений:

[illegible]

т. е. таких решений, для которых тождества

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i y_{ih} \equiv 0 \quad (k = \overline{1, n}, a < x < b),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — постоянные числа, могут выполняться только при $\alpha_{i1} = 0, \alpha_{i2} = 0, \dots, \alpha_{in} = 0$. Такая система решений называется *фундаментальной*. Чтобы система решений была *фундаментальной*, необходимо и достаточно, чтобы ее *определитель Вронского (вронскиан)*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала (a, b) . (При этом $W(x)$ отличен от нуля во всех точках интервала (a, b) .)

При сделанном предположении относительно непрерывности функций $p_{kl}(x)$ ($k, l = \overline{1, n}$) существует бесчисленное множество фундаментальных систем. Фундаментальная система (3) называется *нормированной* в точке $x = x_0$, если решения, составляющие ее, удовлетворяют следующим начальным условиям:

[illegible]

Если известна фундаментальная система решений (3), то их линейная комбинация (по столбцам, если решения расположены по строкам)

$$y_k = \sum_{i=1}^n C_i y_{ik} \quad (k = \overline{1, n}), \quad (4)$$

где C_i — произвольные постоянные, представляет собой общее решение однородной линейной системы (2) в области

$$a < x < b, |y_1| < +\infty, |y_2| < +\infty, \dots, |y_n| < +\infty. \quad (5)$$

Все решения однородной системы (2) содержатся в формуле (4) (почему?).

Неоднородные системы. Чтобы найти общее решение неоднородной системы (1), достаточно знать общее решение *соответствующей однородной системы*

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{i=1}^n p_{ki}(x) z_i \quad (k = \overline{1, n}) \quad (6)$$

и одно частное решение неоднородной системы (1)

$$y_1 = y_1^{(1)}, \quad y_2 = y_2^{(1)}, \quad \dots, \quad y_n = y_n^{(1)}.$$

Сумма этих решений

$$y_k = y_k^{(1)} + \sum_{i=1}^n C_i z_{ik} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (7)$$

дает общее решение системы (1) в области (5).

Все решения неоднородной системы (1) содержатся в формуле (7) (почему?).

Методом вариации произвольных постоянных (*метод Лагранжа*) можно построить общее решение неоднородной системы, исходя только из фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы (6). Этот метод состоит в том, что решение системы (1) ищется в виде

$$y_k = \sum_{i=1}^n C_i(x) z_{ik} \quad (k = \overline{1, n}), \quad (8)$$

где $C_i(x)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции от x . Эти функции определяют из системы

$$\sum_{i=1}^n C_i'(x) z_{ik} = f_k(x) \quad (k = \overline{1, n}).$$

Решая ее, находят $C_i'(x) = \varphi_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$), откуда

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + C_i \quad (i = \overline{1, n}).$$

Подставляя эти значения $C_i(x)$ в формулу (8), получают

$$y_k = \sum_{i=1}^n z_{ik} \int \varphi_i(x) dx + \sum_{i=1}^n C_i z_{ik} \quad (k = \overline{1, n}).$$

Это общее решение системы (1) в области (5).

Особые точки линейной системы. Если все коэффициенты и правые части системы (1) определены в интервале (a, b) , за исключением отдельных точек, в которых они разрывны, то последние называются *особыми точками* системы (1) (ср. гл. IV, § 1).

Чтобы эта однородная линейная система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю, т. е. λ было корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* системы (1).

Каждому из корней характеристического уравнения соответствует хотя бы одно частное решение вида (2). Различают три случая.

1. Все корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ уравнения (4) различны и вещественны. В этом случае, полагая в системе (3) $\lambda = \lambda_i$ ($i = \overline{1, n}$), получают систему

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda_i) \gamma_1 + a_{12} \gamma_2 + \dots + a_{1n} \gamma_n &= 0, \\ a_{21} \gamma_1 + (a_{22} - \lambda_i) \gamma_2 + \dots + a_{2n} \gamma_n &= 0, \\ . &. \\ a_{n1} \gamma_1 + a_{n2} \gamma_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_i) \gamma_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Решая ее, находят нулевое решение $\gamma_1 = \gamma_{i1}, \gamma_2 = \gamma_{i2}, \dots, \gamma_n = \gamma_{in}$

Замечание. Так как ранг системы (5) равен $n-1$ (почему?), то одно из уравнений этой системы будет следствием остальных, так что числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ определяются с точностью до постоянного множителя. В качестве γ_{ik} можно взять алгебраические дополнения элементов любой строки определителя

$$\begin{array}{cccc} a_{11} - \lambda_i & a_{1\bar{2}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2\bar{2}} - \lambda_i & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n\bar{2}} & \dots & a_{nn} - \lambda_i \end{array}$$

(если не все они равны нулю), умножая их в случае необходимости на одно и то же число.

Подстановка значений $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ и $\lambda = \lambda_i$ в формулу (2) даст решение однородной системы (1), соответствующее корню λ_i :

$$y_{i1} = \gamma_{i1} e^{\lambda_1 x}, \quad y_{i2} = \gamma_{i2} e^{\lambda_2 x}, \quad \dots, \quad y_{in} = \gamma_{in} e^{\lambda_n x}.$$

Построив решения, соответствующие всем корням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, получим фундаментальную систему решений

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma_{11}e^{\lambda_1 x}, & \gamma_{12}e^{\lambda_1 x}, & \dots, & \gamma_{1n}e^{\lambda_1 x}, \\ \gamma_{21}e^{\lambda_2 x}, & \gamma_{22}e^{\lambda_2 x}, & \dots, & \gamma_{2n}e^{\lambda_2 x}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1}e^{\lambda_n x}, & \gamma_{n2}e^{\lambda_n x}, & \dots, & \gamma_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{array}$$

Общим решением системы (1) будет

$$y_k = \sum_{i=1}^n C_i \gamma_{ik} e^{\lambda_i x} \quad (k = \overline{1, n}).$$

II. *Корни характеристического уравнения (4) различны, но среди них имеются комплексные.* Укажем вид частных решений, соответствующих комплексным корням.

Если $a+ib$ — корень характеристического уравнения (4), то $a-ib$ тоже будет корнем. Построив решение вида (2), соответствующее корню $a+ib$, и отделив в нем вещественную и мнимую части, получим два вещественных линейно независимых частных решения однородной системы (1). Решения, соответствующие корню $a-ib$, будут линейно зависимы с решениями, соответствующими корню $a+ib$.

Построив частные решения, соответствующие всем парам комплексно-сопряженных корней и всем вещественным корням (если они имеются), и взяв линейную комбинацию всех построенных линейно независимых частных решений с произвольными постоянными коэффициентами, получим общее решение однородной системы (1).

III. *Среди корней характеристического уравнения имеются кратные.* Корню λ_1 кратности k соответствует решение вида

$$y_1 = P_1(x) e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = P_2(x) e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \quad y_n = P_n(x) e^{\lambda_1 x}, \quad (6)$$

где $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ — полиномы от x степени не выше $k-1$ (они могут вырождаться и в постоянные числа), причем среди коэффициентов всех этих полиномов k коэффициентов являются произвольными, а остальные выражаются через них.

Положив поочередно один из этих произвольных коэффициентов равным единице, а остальные равными нулю, мы построим k линейно независимых частных решений. Если λ_1 — вещественный корень, то эти частные решения тоже вещественны.

Если λ_1 — комплексный корень, $\lambda_1 = a+ib$, то $a-ib$ тоже будет корнем характеристического уравнения и притом той же кратности k . Найдя указанным выше методом k линейно независимых комплексных частных решений, соответствующих корню $a+ib$, и отделив в них вещественные и мнимые части, получим $2k$ линейно независимых вещественных частных решений. Решения, соответствующие корню $a-ib$, будут линейно зависимы с решениями, соответствующими корню $a+ib$.

Если наряду с кратным корнем λ_1 имеются другие (кратные или простые) корни, то, построив n линейно независимых вещественных частных решений, соответствующих всем корням, и взяв их линейную комбинацию с произвольными постоянными коэффициентами, получим общее решение однородной системы (1).

На основании вида фундаментальной системы решений легко вывести следующие достаточные признаки устойчивости и

неустойчивости нулевого решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами:

1) если все характеристические числа системы

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l \quad (k = \overline{1, n}) \quad (7)$$

отрицательны или имеют отрицательную вещественную часть, то нулевое решение $x_1 \equiv 0, x_2 \equiv 0, \dots, x_n \equiv 0$ этой системы асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова при $t \rightarrow +\infty$;

2) если хотя бы одно из характеристических чисел системы (7) положительно или имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение этой системы неустойчиво в смысле Ляпунова при $t \rightarrow +\infty$;

3) если система двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

имеет чисто мнимые характеристические числа, то нулевое решение $x \equiv 0, y \equiv 0$, определяемое ею, устойчиво, но не асимптотически;

4) если одно из характеристических чисел системы (8) равно нулю, а другое отрицательно, то нулевое решение $x \equiv 0, y \equiv 0$ устойчиво, но не асимптотически;

5) если система (8) имеет двукратное нулевое характеристическое число, то устойчивость нулевого решения $x \equiv 0, y \equiv 0$ зависит от аналитической структуры семейства решений, соответствующих нулевому характеристическому числу.

Это семейство имеет, согласно формулам (6), вид $x = P_1(t), y = P_2(t)$, где $P_1(t)$ и $P_2(t)$ — либо постоянные, либо линейные функции от t . В первом случае решение $x \equiv 0, y \equiv 0$ будет устойчивым, но не асимптотически, а во втором случае — неустойчивым, причем имеет место условная устойчивость.

Метод Д'Аламбера. Линейные системы (как уже было сказано в начале этого параграфа) можно интегрировать и общими методами, в том числе методом интегрируемых комбинаций. При этом для построения интегрируемых комбинаций в случае системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами существует общий метод, предложенный Д'А л а м б е р о м.

Пусть дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a_{11}y + a_{12}z + f_1(x), \\ \frac{dz}{dx} &= a_{21}y + a_{22}z + f_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Умножим второе уравнение системы на некоторое число k и сложим почленно с первым уравнением. Получим

$$\frac{d(y + kz)}{dx} = (a_{11} + ka_{21})y + (a_{12} + ka_{22})z + f_1(x) + kf_2(x). \quad (10)$$

Преобразуем правую часть и выберем число k так, чтобы она стала линейной функцией от $y + kz$. С этой целью перепишем уравнение (10) в виде

$$\frac{d(y + kz)}{dx} = (a_{11} + ka_{21}) \left(y + \frac{a_{12} + ka_{22}}{a_{11} + ka_{21}} z \right) + f_1(x) + kf_2(x).$$

Положив

$$\frac{a_{12} + ka_{22}}{a_{11} + ka_{21}} = k, \quad (11)$$

получим

$$\frac{d(y + kz)}{dx} = (a_{11} + ka_{21})(y + kz) + f_1(x) + kf_2(x).$$

Интегрируя это линейное (относительно $y + kz$) уравнение, находим

$$y + kz = e^{(a_{11} + ka_{21})x} \left(C + \int (f_1(x) + kf_2(x)) e^{-(a_{11} + ka_{21})x} dx \right). \quad (12)$$

Если уравнение (11) имеет различные вещественные корни k_1 и k_2 , то из формулы (12) получим два первых интеграла системы (9), и интегрирование этой системы будет окончено.

Метод Д'Аламбера распространяется и на линейные системы с постоянными коэффициентами, содержащие производные выше первого порядка.

Приведение однородной линейной системы к системе с постоянными коэффициентами с помощью замены независимой переменной. Если коэффициенты системы (2) из § 1 таковы, что

$$p_{kl}(x) = a_{kl}\varphi(x) \quad (k, l = \overline{1, n}),$$

то подстановка

$$t = \int \varphi(x) dx$$

приводит ее к системе с постоянными коэффициентами (ср. гл. IV, § 3).

Однородные линейные системы, правые части которых удовлетворяют условиям Коши—Римана. Пусть дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p(t)x - q(t)y \equiv u(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= q(t)x + p(t)y \equiv v(t, x, y), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

правые части которой, рассматриваемые как функции от x и y , удовлетворяют условиям Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Общее решение системы (13) можно найти, следуя методу, указанному в гл. V, § 2. При этом система (13) приводится к одному уравнению

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t) z \quad (\lambda(t) = p(t) + iq(t)). \quad (14)$$

Интегрируя его, получаем $z = Ce^{\int \lambda(t) dt}$ ($C = C_1 + iC_2$). Отделив вещественные и мнимые части, найдем общее решение системы (13).

Для построения фундаментальной системы решений системы (13), нормированной в точке $t=t_0$, достаточно найти решения $z_1 = z_1(t)$ и $z_2 = z_2(t)$ уравнения (14), удовлетворяющие соответственно начальным условиям: $z_1=1$ при $t=t_0$ и $z_2=i$ при $t=t_0$ (почему?), и отделить в них вещественные и мнимые части (см. пример 9 на с. 193).

Изложенный метод распространяется на систему вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^n x}{dt^n} &= p(t)x - q(t)y, \\ \frac{d^n y}{dt^n} &= q(t)x + p(t)y. \end{aligned} \right\}$$

Примеры. 1. Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} &= 3y + 4z. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Найдем общее решение ее по методу Эйлера.

Ищем частное решение системы (15) в виде

$$y = \gamma_1 e^{\lambda x}, \quad z = \gamma_2 e^{\lambda x}. \quad (16)$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Оно имеет корни: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Построим частное решение вида (16), соответствующее корню $\lambda_1=1$. Согласно формуле (5), числа γ_1 и γ_2 нужно искать из системы

$$\left. \begin{aligned} -2\gamma_1 - 2\gamma_2 &= 0, \\ 3\gamma_1 + 3\gamma_2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

которая сводится к одному уравнению $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, так что одно из чисел γ_1 , γ_2 можно выбирать произвольно. Положив $\gamma_1=1$, получим $\gamma_2=-1$. Поэтому характеристическому числу $\lambda_1=1$ соответствует частное решение $y_1=e^x$, $z_1=-e^x$.

Аналогично находим частное решение, соответствующее характеристическому числу $\lambda_2=2$: $y_2=2e^{2x}$, $z_2=-3e^{2x}$.

Общим решением системы (15) будет

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}, \\ z &= -C_1 e^x - 3C_2 e^{2x}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = -1, \quad z = 2 \quad \text{при } x = 0. \quad (18)$$

Полагая в общем решении (17) $x=0$, $y=-1$, $z=2$, имеем: $-1 = C_1 + 2C_2$, $2 = -C_1 - 3C_2$, откуда $C_1=1$, $C_2=-1$. Поэтому искомым решением будет

$$\left. \begin{aligned} y &= e^x - 2e^{2x}, \\ z &= -e^x + 3e^{2x}. \end{aligned} \right\}$$

Других решений, удовлетворяющих начальным условиям (18), нет.

2. Пусть дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2y - z, \\ \frac{dz}{dx} &= y + 2z. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Найдем ее общее решение.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или } \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,$$

имеет корни: $\lambda_1 = 2+i$, $\lambda_2 = 2-i$. Построим комплексное решение вида $y = \gamma_1 e^{(2+i)x}$, $z = \gamma_2 e^{(2+i)x}$, соответствующее характеристическому числу $\lambda_1 = 2+i$. Числа γ_1 и γ_2 определяем из уравнения $-i\gamma_1 - \gamma_2 = 0$. Полагая $\gamma_1 = 1$, находим $\gamma_2 = -i$, так что

$$\left. \begin{aligned} y &= e^{(2+i)x} = e^{2x} (\cos x + i \sin x), \\ z &= -ie^{(2+i)x} = e^{2x} (\sin x - i \cos x). \end{aligned} \right\}$$

Отсюда (отделяя вещественные и мнимые части) получаем два вещественных линейно независимых частных решения:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= e^{2x} \cos x, & z_1 &= e^{2x} \sin x, \\ y_2 &= e^{2x} \sin x, & z_2 &= -e^{2x} \cos x. \end{aligned} \right\}$$

Общим решением системы (19) будет

$$\left. \begin{aligned} y &= e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x), \\ z &= e^{2x} (C_1 \sin x - C_2 \cos x). \end{aligned} \right\}$$

3. Найти общее решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -4x + 2y + 5z, \\ \frac{dy}{dt} &= 6x - y - 6z, \\ \frac{dz}{dt} &= -8x + 3y + 9z. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & -1-\lambda & -6 \\ -8 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0,$$

имеет корни: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Найдем сначала частное решение вида $x = \gamma_1 e^{2t}, y = \gamma_2 e^{2t}, z = \gamma_3 e^{2t}$, соответствующее простому характеристическому числу $\lambda_1 = 2$. Числа $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ можно определить из системы

$$\begin{cases} -6\gamma_1 + 2\gamma_2 + 5\gamma_3 = 0, \\ 6\gamma_1 - 3\gamma_2 - 6\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Но проще взять в качестве их алгебраические дополнения элементов первой строки определителя

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & -6 \\ -8 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Получим: $\gamma_1 = -3, \gamma_2 = 6, \gamma_3 = -6$ или (сократив на -3) $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -2, \gamma_3 = 2$, так что искомым решением будет

$$x_1 = e^{2t}, y_1 = -2e^{2t}, z_1 = 2e^{2t}.$$

Теперь построим два линейно независимых частных решения, соответствующих кратному характеристическому числу $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Согласно формуле (6), ему отвечает решение вида

$$x = (A_1 t + A_2) e^t, y = (B_1 t + B_2) e^t, z = (C_1 t + C_2) e^t. \quad (21)$$

Коэффициенты $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ определяются подстановкой решения (21) в систему (20). Выполняя эту подстановку и сокращая на e^t , имеем:

$$\begin{cases} A_1 t + A_1 + A_2 = (-4A_1 + 2B_1 + 5C_1) t - 4A_2 + 2B_2 + 5C_2, \\ B_1 t + B_1 + B_2 = (6A_1 - B_1 - 6C_1) t + 6A_2 - B_2 - 6C_2, \\ C_1 t + C_1 + C_2 = (-8A_1 + 3B_1 + 9C_1) t - 8A_2 + 3B_2 + 9C_2. \end{cases}$$

Приравняв коэффициенты при t и свободные члены, получаем систему

$$\begin{cases} -5A_1 + 2B_1 + 5C_1 = 0, \\ 6A_1 - 2B_1 - 6C_1 = 0, \\ -8A_1 + 3B_1 + 8C_1 = 0, \\ -5A_2 + 2B_2 + 5C_2 = A_1, \\ 6A_2 - 2B_2 - 6C_2 = B_1, \\ -8A_2 + 3B_2 + 8C_2 = C_1, \end{cases}$$

откуда $A_1 = C_1, B_1 = 0, A_2 = C_1 + C_2, B_2 = 3C_1$, причем C_1 и C_2 произвольны. Решение (21) принимает вид:

$$x = (C_1 t + C_1 + C_2) e^t, y = 3C_1 e^t, z = (C_1 t + C_2) e^t.$$

В качестве линейно независимых частных решений, соответствующих характеристическому числу $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, можно взять

$$\begin{cases} x_2 = (t+1) e^t, & y_2 = 3e^t, & z_2 = t e^t; \\ x_3 = e^t, & y_3 = 0, & z_3 = e^t. \end{cases}$$

Общим решением системы (20) будет

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + (C_2 t + C_2 + C_3) e^t, \\ y &= -2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^t, \\ z &= 2C_1 e^{2t} + (C_2 t + C_3) e^t. \end{aligned} \right\}$$

4. Найти общее решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y - 2z + 3, \\ \frac{dz}{dx} &= y - z + 1. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Эта система неоднородная. Проинтегрируем сначала соответствующую однородную систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} &= y - z. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 + 1 = 0,$$

имеет чисто мнимые корни: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Корню $\lambda_1 = i$ соответствует комплексное решение $y = 2e^{ix}$, $z = (1-i)e^{ix}$, откуда находим

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2\cos x, & z_1 &= \cos x + \sin x; \\ y_2 &= 2\sin x, & z_2 &= \sin x - \cos x, \end{aligned} \right\}$$

так что общим решением однородной системы (23) будет

$$\left. \begin{aligned} y &= 2C_1 \cos x + 2C_2 \sin x, \\ z &= (C_1 - C_2) \cos x + (C_1 + C_2) \sin x. \end{aligned} \right\}$$

Переходя к нахождению общего решения данной неоднородной системы (22), замечаем, что в нашем примере нет необходимости пользоваться методом Лагранжа, ибо можно легко построить частное решение этой системы. Отыскивая последнее в виде $y=b$, $z=c$, находим, что $y=1$, $z=2$ является искомым частным решением. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 + 2C_1 \cos x + 2C_2 \sin x, \\ z &= 2 + (C_1 - C_2) \cos x + (C_1 + C_2) \sin x \end{aligned} \right\}$$

будет общим решением системы (22).

5. Найти общее решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -y - 2z + 2e^{-x}, \\ \frac{dz}{dx} &= 3y + 4z + e^{-x} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

методом вариации произвольных постоянных.

Соответствующей однородной системой будет система (15), рассмотренная в примере 1. Поэтому, следуя сказанному в § 1, общее решение системы (24) ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1(x) e^x + 2C_2(x) e^{2x}, \\ z &= -C_1(x) e^x - 3C_2(x) e^{2x}. \end{aligned} \right\}$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находим из системы

$$\left. \begin{aligned} C_1'(x) e^x + 2C_2'(x) e^{2x} &= 2e^{-x}, \\ -C_1'(x) e^x - 3C_2'(x) e^{2x} &= e^{-x}. \end{aligned} \right\}$$

Получаем $C_1'(x) = 8e^{-2x}$, $C_2'(x) = -3e^{-3x}$. Поэтому

$$C_1(x) = -4e^{-2x} + C_1, \quad C_2(x) = e^{-3x} + C_2.$$

Следовательно, общим решением системы (24) будет

$$\left. \begin{aligned} y &= -2e^{-x} + C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}, \\ z &= e^{-x} - C_1 e^x - 3C_2 e^{2x}. \end{aligned} \right\}$$

Заметим, что здесь, так же как и в предыдущем примере, можно было бы избежать применения метода Лагранжа. Для этого ищем частное решение системы (24) в виде $y = ae^{-x}$, $z = be^{-x}$ методом неопределенных коэффициентов. Получим $y_1 = -2e^{-x}$, $z_1 = e^{-x}$ (см. [9]).

6. Для системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y, \\ \frac{dy}{dt} &= x \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Ити общее решение в форме Коши, траектории движений, определяемых этой системой, и исследовать на устойчивость нулевое решение.

Интегрируя систему (25) методом исключения, имеем $d^2x/dt^2 + x = 0$, так что

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y &= C_1 \sin t - C_2 \cos t. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Найдем общее решение системы (25) в форме Коши. Пусть $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Тогда, полагая в системе (26) $t=0$, $x=x_0$, $y=y_0$, имеем $x_0 = C_1$, $y_0 = -C_2$. Поэтому общим решением в форме Коши системы (25) будет

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \cos t - y_0 \sin t, \\ y &= x_0 \sin t + y_0 \cos t. \end{aligned} \right\}$$

Траекториями движений, определяемых системой (25), являются начало координат $x=0$, $y=0$ и интегральные кривые уравнения $dy/dx = x/(-y)$, т. е. окружности

$$x^2 + y^2 = C^2 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2,$$

причем точка движется по окружности против часовой стрелки (рис. 52), как это видно из самой системы (25) (почему?).

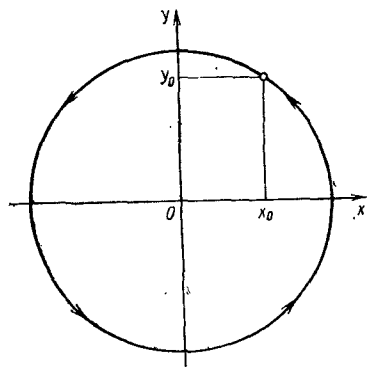


Рис. 52

Нулевое решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, определяемое системой (25), будет устойчиво, но не асимптотически (почему?).

В задачах 1117—1132 проинтегрировать систему уравнений последовательным интегрированием или методом исключения.

$$1117. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -2y, \\ \frac{dz}{dx} = z. \end{cases}$$

$$1119. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

$$1121. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2y, \\ \frac{dz}{dt} = -z. \end{cases}$$

$$1123. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = y. \end{cases}$$

$$1125. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

$$1127. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

$$1129. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 6y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x - z, \\ \frac{dz}{dt} = -6z. \end{cases}$$

$$1118. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

$$1120. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} y, \\ \frac{dz}{dx} = y + z. \end{cases}$$

$$1122. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 2y + z, \\ \frac{dz}{dt} = 2z. \end{cases}$$

$$1124. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 1. \end{cases}$$

$$1126. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z. \end{cases}$$

$$1128. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

$$1130. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y - z - 5x + 1, \\ \frac{dz}{dx} = y + 2z + x - 1. \end{cases}$$

$$1131. \begin{cases} y' = -5y + 2z + 40e^x, \\ z' = y - 6z + 9e^{-x}. \end{cases}$$

$$1132. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \sin t. \end{cases}$$

В задачах 1133—1150 найти общее решение системы уравнений методом Эйлера и, где указано, выделить решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

$$1133. y' = y + z, z' = -2y + 4z; y = 0, z = -1 \text{ при } x = 0.$$

$$1134. y' = 3y - z, z' = 10y - 4z; y = 1, z = 5 \text{ при } x = 0.$$

$$1135. \begin{cases} y' = y - z, \\ z' = -4y + 4z. \end{cases}$$

$$1136. \begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = -6y - 3z. \end{cases}$$

$$1137. \begin{cases} y' = 2y - 3z, \\ z' = 3y + 2z. \end{cases}$$

$$1138. \begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 6y - 5z. \end{cases}$$

$$1139. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x - 4y. \end{cases}$$

$$1140. \begin{cases} y' = y + z, \\ z' = -10y - z. \end{cases}$$

$$1141. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 12y - 4z, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y + z, \\ \frac{dz}{dt} = -x - 12y + 6z. \end{cases}$$

$$1142. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \frac{dy}{dt} = 12x - 4y - 12z, \\ \frac{dz}{dt} = -4x + y + 5z. \end{cases}$$

$$1143. \frac{dx}{dt} = -y + z, \frac{dy}{dt} = z, \frac{dz}{dt} = -x + z; x = 1, y = 1/2,$$

$$z = 1/2 \text{ при } t = 0.$$

$$1144. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 21x - 8y - 19z, \\ \frac{dy}{dt} = 18x - 7y - 15z, \\ \frac{dz}{dt} = 16x - 6y - 15z. \end{cases}$$

$$1145. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y + z, \\ \frac{dz}{dx} = -y - 3z. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 1146. \quad & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 3y. \end{cases} & 1147. \quad & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x - 3y - 9z, \\ \frac{dy}{dt} = -18x + 7y + 18z, \\ \frac{dz}{dt} = 18x - 6y - 17z. \end{cases} \\
 1148. \quad & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y - 4z, \\ \frac{dy}{dt} = -12x + 5y + 12z, \\ \frac{dz}{dt} = 10x - 9y - 9z. \end{cases} & 1149. \quad & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y - 3z, \\ \frac{dy}{dt} = -6x + 2y + 6z, \\ \frac{dz}{dt} = 6x - 2y - 6z. \end{cases} \\
 1150. \quad & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - z, \\ \frac{dy}{dt} = -6x + 2y + 6z, \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y - 4z. \end{cases}
 \end{aligned}$$

В задачах 1151—1156 найти общее решение системы уравнений методом вариации произвольных постоянных и, где указано, выделить решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

1151. $y_1' = y_1 + y_2 - x^2 + x - 2$, $y_2' = -2y_1 + 4y_2 + 2x^2 - 4x - 7$;
 $y_1 = 0$, $y_2 = 2$ при $x = 0$.

1152. $\begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x}, \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x}. \end{cases}$ 1153. $\begin{cases} y' = 2y - z + 2e^x, \\ z' = 3y - 2z + 4e^x. \end{cases}$

1154. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 4\cos 2t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t. \end{cases}$

1155. $\frac{dx}{dt} = x + y - \cos t$, $\frac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t$; $x = 1$,

$y = -2$ при $t = 0$.

1156. $y' = 2y + 4z + \cos x$, $z' = -y - 2z + \sin x$.

В задачах 1157—1159 найти частное решение указанного вида методом неопределенных коэффициентов и построить общее решение.

$$1157. y' = -y + z - 2e^{-x}, z' = -6y + 4z - 4e^{-x}; y_1 = ae^{-x}, z_1 = be^{-x}.$$

$$1158. y' = 2y + z - 4, z' = y + 2z + 3x - 6; y_1 = ax + b, z_1 = cx + d.$$

$$1159. y' = 2y - z - \sin x, z' = 3y - 2z - \cos x; y_1 = a \cos x + b \sin x, z_1 = c \cos x + d \sin x.$$

В задачах 1160—1164 проинтегрировать систему уравнений методом Д'Аламбера.

$$1160. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

$$1161. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$$

$$1162. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y. \end{cases}$$

$$1163. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y + 4z + e^x, \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 5z + 1. \end{cases}$$

$$1164. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$$

В задачах 1165—1167 найти независимые интегралы системы уравнений.

$$1165. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

$$1166. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y - z, \\ \frac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases}$$

$$1167. \frac{dx}{1} = \frac{dy}{2y - z} = \frac{dz}{y + 2z}.$$

В задачах 1168—1183 для системы уравнений найти общее решение в форме Коши (полагая $t_0 = 0$), траектории движений, определяемых этой системой, указав на рисунке стрелками направление движения при возрастании времени t , и исследовать на устойчивость нулевое решение.

$$1168. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

$$1169. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

$$1170. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x, \\ \frac{dy}{dt} = -2y. \end{cases}$$

$$1171. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

$$1172. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = -2y. \end{cases}$$

$$1173. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

$$1174. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x, \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$$

$$1175. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

$$1176. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

$$1177. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 3y. \end{cases}$$

$$1178. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x, \\ \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases}$$

$$1179. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

$$1180. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

$$1181. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

$$1182. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases}$$

$$1183. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases}$$

В задачах 1184—1193 исследовать на устойчивость нулевое решение, определяемое системой уравнений, по виду характеристических чисел этой системы.

$$1184. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

$$1185. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x. \end{cases}$$

$$1186. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

$$1187. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$$

$$1188. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 9x - 4y, \end{cases}$$

$$1189. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

$$1190. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$$

$$1191. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

$$1192. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2y, \\ \frac{dz}{dt} = -3z. \end{cases}$$

$$1193. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y - 4z, \\ \frac{dy}{dt} = -12x + 5y + 12z, \\ \frac{dz}{dt} = 10x - 3y - 9z. \end{cases}$$

В задачах 1194—1197 проинтегрировать систему уравнений, приводящуюся к системе с постоянными коэффициентами заменой независимой переменной.

$$1194. \begin{cases} x \frac{dy}{dx} = -y + z, \\ x \frac{dz}{dx} = -y - 3z. \end{cases}$$

$$1195. \begin{cases} x^2 \frac{dy}{dx} = -y - 2z, \\ x^2 \frac{dz}{dx} = 3y + 4z. \end{cases}$$

$$1196. \begin{cases} 2\sqrt{x} \frac{dy}{dx} = 2y - z, \\ 2\sqrt{x} \frac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases}$$

$$1197. \begin{cases} x \frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ x \frac{dy_2}{dx} = y_2, \\ x \frac{dy_3}{dx} = -y_3. \end{cases}$$

1198. Найти фундаментальную систему решений системы уравнений $dx/dt = px - qy$, $dy/dt = qx + py$, нормированную в точке $t=0$. (У к а з а н и е. Воспользоваться методом, изложенным в § 2.)

В задачах 1199—1206 построить фундаментальную систему решений, нормированную в точке $x=0$.

$$1199. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y, \\ \frac{dz}{dx} = z. \end{cases}$$

$$1200. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - z, \\ \frac{dz}{dx} = 2z - 2y. \end{cases}$$

$$1201. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y, \\ \frac{dz}{dx} = 2z. \end{cases}$$

$$1202. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y, \\ \frac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases}$$

$$1203. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - z, \\ \frac{dz}{dx} = z - y. \end{cases}$$

$$1204. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = -y. \end{cases}$$

$$1205. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z, \\ \frac{dz}{dx} = -5y - 3z. \end{cases}$$

$$1206. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -3y, \\ \frac{dz}{dt} = z. \end{cases}$$

В задачах 1207—1212 построить однородную линейную систему дифференциальных уравнений, имеющую заданную фундаментальную систему решений (§ 1).

$$1207. \begin{cases} y_{11} = e^{3x}, & y_{12} = 0; \\ y_{21} = 0, & y_{22} = e^{3x}. \end{cases}$$

$$1208. \begin{cases} y_{11} = e^{3x}, & y_{12} = 0; \\ y_{21} = 0, & y_{22} = e^{3x}. \end{cases}$$

$$1209. \begin{cases} y_{11} = e^{3x}, & y_{12} = 0; \\ y_{21} = xe^{3x}, & y_{22} = e^{3x}. \end{cases}$$

$$1210. \begin{cases} y_{11} = \cos 2x, & y_{12} = -\sin 2x; \\ y_{21} = \sin 2x, & y_{22} = \cos 2x. \end{cases}$$

$$1211. \begin{cases} y_{11} = 1, & y_{12} = -x; \\ y_{21} = x, & y_{22} = 1. \end{cases}$$

$$1212. \begin{cases} y_{11} = 1, & y_{12} = x; \\ y_{21} = -x, & y_{22} = 1. \end{cases}$$

В задачах 1213—1216 проинтегрировать систему уравнений и, где указано, найти решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

$$1213. \frac{d^2x}{dt^2} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

1214. $\frac{d^2x}{dt^2} - y = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} - x = 0$; $x = 1$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $y = 2$, $\frac{dy}{dt} = 0$
при $t = 0$.

1215. $y'' + 2z' - y + 2z = 1$, $z'' + 2y' + 2y - z = x$; $y = -7/9$,
 $y' = 2/3$, $z = -2/9$, $z' = 1/3$ при $x = 0$.

$$1216. \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -x + y + z, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x - y + z, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = x + y - z. \end{cases}$$

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Общие понятия. Рассмотрим однородную линейную систему двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p_{11}(x)y + p_{12}(x)z, \\ \frac{dz}{dx} &= p_{21}(x)y + p_{22}(x)z. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если коэффициенты системы (1) разлагаются в ряды по степеням x , сходящиеся в области $|x| < \rho$, то существует единственное решение $y = y(x)$, $z = z(x)$ этой системы, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{при } x = 0, \quad (2)$$

где начальные значения y_0 и z_0 можно задавать произвольно. Это решение, согласно теореме Коши, разложимо в ряды по степеням x :

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} x^k, \\ z &= z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} x^k, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

которые будут сходиться, по крайней мере, в той же области $|x| < \rho$, в которой сходятся ряды для коэффициентов системы (1).

Поэтому в рассматриваемом случае решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям (2), можно сразу искать в виде (3). При этом коэффициенты $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$ определяются, например, методом неопределенных коэффициентов.

Для нахождения общего решения системы (1) обычно сначала строят фундаментальную систему решений, нормированную в точке $x=0$.

Пример. Найти общее решение системы

$$\left. \begin{aligned} y' &= \frac{x}{1+x^2} y + \frac{1}{1+x^2} z, \\ z' &= -\frac{1}{1+x^2} y + \frac{x}{1+x^2} z. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Построим фундаментальную систему решений, нормированную в точке $x=0$. Ищем сначала частное решение y_1, z_1 с начальными условиями: $y_1=1, z_1=0$ при $x=0$. Это решение имеет вид

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} x^k, \\ z &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} x^k. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя эти ряды в систему

$$\left. \begin{aligned} (1+x^2) y' &= xy + z, \\ (1+x^2) z' &= -y + xz \end{aligned} \right\}$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, находим $c_k^{(1)}=0$ ($k=1, 2, \dots$), $c_1^{(2)}=-1$, $c_k^{(2)}=0$ ($k=2, 3, \dots$), так что искомым решением будет $y_1=1, z_1=-x$.

Аналогично, отыскивая частное решение y_2, z_2 с начальными условиями: $y_2=0, z_2=1$ при $x=0$, находим $y_2=x, z_2=1$.

Общим решением системы (4) будет

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 + C_2 x, \\ z &= -C_1 x + C_2. \end{aligned} \right\}$$

В задачах 1217—1219 проинтегрировать с помощью степенных рядов систему уравнений.

$$1217. \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= xy + (1-x^2)z, \\ \frac{dz}{dx} &= y - xz. \end{aligned} \right. \quad 1218. \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x^3y + (2x-2x^5)z, \\ \frac{dz}{dx} &= 2xy - 2x^3z. \end{aligned} \right.$$

$$1219. \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1-x+x^2}{(1-x)(1-x^2)} y + \frac{1-2x}{(1-x)^2(1-x^2)} z, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{1}{1-x^2} y - \frac{1+x-x^2}{(1-x)(1-x^2)} z. \end{aligned} \right.$$

4. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Общие понятия. Пусть дана однородная линейная система

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{lk}(x) y_l \quad (k = \overline{1, n}), \quad (1)$$

коэффициенты которой непрерывны в интервале (a, b) . Тогда система (1) имеет фундаментальную систему решений

$$y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Введем в рассмотрение две матрицы:

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}, \quad P(x) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

где матрица $P(x)$ есть транспонированная матрица коэффициентов системы (1). Тогда систему (1) можно переписать в виде одного *матричного уравнения*

$$\frac{dY}{dx} = YP \quad (2)$$

(почему?).

Всякая *неособенная* матрица, т. е. матрица с определителем, отличным от нуля, обращающая уравнение (2) в тождество, называется *решением* этого уравнения или *интегральной матрицей*. Если Y_1 — интегральная матрица, то CY_1 , где C — любая неособенная постоянная матрица, тоже будет интегральной матрицей (почему?).

Если матрица $P(x)$ коммутирует со своим интегралом (случай Лапко — Данилевского):

$$P(x) \int_{x_0}^x P(x) dx = \int_{x_0}^x P(x) dx \cdot P(x), \quad (3)$$

в качестве интегральной матрицы можно взять

$$Y_1 = e^{\int_{x_0}^x P(x) dx}. \quad (4)$$

Здесь справа стоит экспоненциальная (показательная с основанием e) функция от матрицы. Вообще *экспоненциальная функция* от матрицы Z определяется так:

$$e^Z = I + Z + \frac{Z^2}{2!} + \dots + \frac{Z^m}{m!} + \dots, \quad (5)$$

где I — единичная матрица того же порядка, что и Z .

Условие (3), в частности, заведомо выполнено, если матрица $P(x)$ постоянная. Поэтому однородную линейную систему с постоянными вещественными коэффициентами всегда можно проинтегрировать матричным методом, т. е. найти сразу всю фундаментальную систему решений (интегральную матрицу соответствующего матричного уравнения). Рассмотрим

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^n a_{ik} y_i \quad (k = \overline{1, n}), \quad (6)$$

Эта система равносильна матричному уравнению

$$\frac{dY}{dx} = YA, \quad (7)$$

где A — транспонированная матрица коэффициентов системы (6).

Интегральной матрицей уравнения (7), или, что то же, фундаментальной системой решений системы (6), согласно формуле (4), будет (при $P=A$, $x_0=0$)

$$Y_1 = e^{Ax}. \quad (8)$$

Эта фундаментальная система решений нормирована в точке $x=0$. Каждый элемент интегральной матрицы (8) представляет собой степенной ряд по степеням x , сходящийся при всех x . Более того, все эти ряды можно просуммировать, так что интегральная матрица (8) будет состоять из элементарных функций.

Чтобы убедиться в этом, предположим сначала, что A есть каноническая матрица, и притом чисто диагональная:

$$A = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n],$$

так что всем характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A соответствуют простые элементарные делители

$$\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \dots, \lambda - \lambda_n,$$

в то время как среди самих чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ могут быть и равные между собой. В этом случае, пользуясь формулой (5), находим

$$e^{Ax} = e^{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]x} = e^{[\lambda_1 x, \lambda_2 x, \dots, \lambda_n x]} = [e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}].$$

Поэтому интегральная матрица (8) принимает вид

$$Y_1 = [e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}]. \quad (9)$$

Пусть теперь матрица A по-прежнему каноническая, но квазидиагональная:

$$A = [I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)] \quad (\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_s = n),$$

где $I_{\rho_h}(\lambda_h)$ («канонический ящик») есть матрица порядка ρ_h , имеющая вид

$$I_{\rho_k}(\lambda_k) = \begin{bmatrix} -\lambda_k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_k \end{bmatrix},$$

причем $I_1(\lambda_m) = \lambda_m$. [Матрица $[I_{\rho_k}(\lambda_k)]$ соответствует элементарному делителю $(\lambda - \lambda_k)^{\rho_k}$ ($k = \overline{1, s}$). Среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ могут быть и равные между собой. В этом случае

$$Y_1 = e^{Ax} = e^{[I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)]x} = e^{[I_{\rho_1}(\lambda_1)x, I_{\rho_2}(\lambda_2)x, \dots, I_{\rho_s}(\lambda_s)x]} = \\ = [e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x}, e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x}, \dots, e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x}],$$

где

$$e^{I_{\rho_k}(\lambda_k)x} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_k x} & & 0 & & \dots & 0 \\ x e^{\lambda_k x} & & e^{\lambda_k x} & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{\rho_k-1}}{(\rho_k-1)!} e^{\lambda_k x} & \frac{x^{\rho_k-2}}{(\rho_k-2)!} e^{\lambda_k x} & \dots & e^{\lambda_k x} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим, наконец, общий случай, когда матрица A не каноническая. В этом случае ее всегда можно привести к каноническому виду с помощью преобразования подобия, т. е. можно найти такую неособенную матрицу S , чтобы матрица

$$B = SAS^{-1} \quad (10)$$

была канонической.

Сделаем теперь в матричном уравнении (7) подстановку

$$Y = ZS, \quad (11)$$

где Z — новая неизвестная интегральная матрица. Получим

$$\frac{dZ}{dx} S = ZSA, \quad \frac{dZ}{dx} = ZSAS^{-1}$$

или

$$\frac{dZ}{dx} = ZB, \quad (12)$$

где B — каноническая матрица.

Систему дифференциальных уравнений, соответствующую матричному уравнению (12), называют канонической формой рассматриваемой системы (6).

Из всего изложенного выше следует правило интегрирования

однородной линейной системы с постоянными коэффициентами матричным методом:

Чтобы найти общее решение системы (6), нужно:

1) записать матричное уравнение (7), соответствующее системе (6);

2) привести матрицу A к каноническому виду (10), найдя матрицу S ;

3) найти интегральную матрицу Z уравнения (12) с канонической матрицей B ;

4) подставить найденную интегральную матрицу Z в формулу (11), заменив в случае необходимости в интегральной матрице Y комплексные решения соответствующими вещественными решениями;

5) взять линейные комбинации элементов полученной матрицы Y по столбцам с произвольными постоянными коэффициентами $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Пример. Найти общее решение системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 6y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= 3y_1 + 2y_2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Система (13) равносильна матричному уравнению

$$\frac{dY}{dx} = YA,$$

где

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Приведем матрицу A к каноническому виду. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & 3 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0.$$

Так как оно имеет разные корни: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5$, то

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Найдем матрицу S . Имеем $B = SAS^{-1}$, $BS = SA$. Пусть

$$S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} 3a &= 6a - b, \\ 3b &= 3a + 2b, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 5c &= 6c - d, \\ 5d &= 3c + 2d, \end{aligned} \right\}$$

Поэтому $b = 3a$, $c = d$. Положив $a = 1$, $d = 1$, получим $b = 3$, $c = 1$, так что

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Интегрируя уравнение

$$\frac{dZ}{dx} = ZB, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

согласно формуле (9), получаем

$$Z = \begin{bmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{5x} \end{bmatrix}.$$

Найдем Y по формуле (11). Имеем:

$$Y = \begin{bmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{5x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3x} & 3e^{3x} \\ e^{5x} & e^{5x} \end{bmatrix}.$$

Общим решением системы (13) будет

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}, \\ y_2 = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}. \end{cases}$$

В задачах 1220—1229 для системы уравнений записать соответствующее матричное уравнение и его интегральную матрицу.

$$1220. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_2. \end{cases}$$

$$1221. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 0, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_2. \end{cases}$$

$$1222. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_2. \end{cases}$$

$$1223. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_2. \end{cases}$$

$$1224. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_2, \\ \frac{dy_3}{dx} = 3y_3. \end{cases}$$

$$1225. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_2, \\ \frac{dy_3}{dx} = 3y_3. \end{cases}$$

$$1226. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_2, \\ \frac{dy_3}{dx} = 3y_3. \end{cases}$$

$$1227. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_2, \\ \frac{dy_3}{dx} = 2y_3. \end{cases}$$

$$1228. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_2, \\ \frac{dy_3}{dx} = 2y_3. \end{cases}$$

$$1229. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = 2y_3. \end{cases}$$

В задачах 1230—1240 проинтегрировать систему уравнений матричным методом.

$$1230. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

$$1231. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -2y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

$$1232. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

$$1233. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 4y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

$$1234. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 4y_1 - 2y_2. \end{cases}$$

$$1235. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 + 12y_2 - 4y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 - 3y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_1 - 12y_2 + 6y_3. \end{cases}$$

$$1236. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 10y_1 - 3y_2 - 9y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = -18y_1 + 7y_2 + 18y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = 18y_1 - 6y_2 - 17y_3. \end{cases}$$

$$1237. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 5y_1 - y_2 - 4y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = -12y_1 + 5y_2 + 12y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = 10y_1 - 3y_2 - 9y_3. \end{cases}$$

$$1238. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = ay_1 + ay_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = ay_2, \\ \frac{dy_3}{dx} = ay_1 + ay_3. \end{cases}$$

$$1239. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y, \\ \frac{dz}{dt} = 3x + z. \end{cases}$$

$$1240. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 2x, \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 4x. \end{cases}$$

1241. При каких условиях однородная линейная система двух уравнений с постоянными коэффициентами приводится к одному однородному линейному уравнению второго порядка?

1242. Доказать, что однородная линейная система двух уравнений с постоянными коэффициентами $\frac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z$, $\frac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z$ в случае непростого элементарного делителя $(\lambda - \lambda_1)^2$ матрицы коэффициентов имеет фундаментальную систему решений вида $y_1 = \gamma_1 e^{\lambda_1 x}$, $z_1 = \gamma_2 e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = (\gamma_1 x + a) e^{\lambda_1 x}$, $z_2 = \gamma_2 x e^{\lambda_1 x}$. Найти фундаментальную систему решений такого вида для системы $\frac{dy}{dx} = -y + z$, $\frac{dz}{dx} = -y - 3z$.

5. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вопросы

1. Какой общий вид имеет линейная система? Когда она называется однородной; неоднородной?
2. При каком условии задача Коши для линейной системы имеет единственное решение? Какова при этом условии степень произвола выбора начальных данных решений линейной системы? В каком интервале существуют решения? Почему линейная система не имеет особых решений?
3. Какие решения однородной линейной системы называются линейно независимыми? Что такое фундаментальная система решений? Может ли нулевое решение входить в состав фундаментальной системы решений? Какое условие является необходимым и достаточным для того, чтобы данная система решений была фундаментальной? Сколько фундаментальных систем решений имеет заданная однородная линейная система? Какая фундаментальная система называется нормированной в заданной точке $x = x_0$?
4. Как построить общее решение однородной линейной системы, если известна фундаментальная система решений? В какой области определено общее решение? Как решить задачу Коши с помощью формулы общего решения?
5. Как найти общее решение неоднородной линейной системы, если известно одно частное решение ее и общее решение соответствующей однородной системы?
6. В чем состоит метод Лагранжа нахождения общего решения неоднородной линейной системы?
7. Как построить однородную линейную систему, имеющую заданную фундаментальную систему решений?

8. В чем состоит метод Эйлера интегрирования однородных линейных систем с постоянными коэффициентами? Как зависит структура фундаментальной системы решений от вида корней характеристического уравнения? Как влияют на структуру фундаментальной системы решений элементарные делители матрицы коэффициентов системы?

9. Как по характеристическим числам однородной линейной системы с постоянными коэффициентами можно судить об устойчивости (неустойчивости) ее нулевого решения?

10. В чем состоит метод Д'Аламбера интегрирования линейных систем с постоянными коэффициентами?

11. При каком условии однородная линейная система двух уравнений имеет частное решение, в котором искомые функции принимают заданные начальные значения при $x=0$ и которое представимо в виде степенных рядов по степеням x ? Как можно выбирать начальные значения искомых функций? В какой области сходящиеся ряды, представляющие решения?

12. Как найти общее решение однородной линейной системы двух уравнений с помощью степенных рядов?

13. В чем состоит правило интегрирования однородной линейной системы с постоянными коэффициентами матричным методом?

Задачи

В задачах 1243, 1244 доказать, пользуясь теоремой Пикара, существование и единственность решения, удовлетворяющего поставленным начальным условиям; оценить интервал существования решения; построить второе приближение к искомому решению (по методу Пикара).

$$1243. \quad y' = -\frac{1}{1+x} y + z - x^2, \quad z' = y + \frac{2}{x} z - \frac{1}{1+x}; \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = 1 \text{ при } x = 1.$$

$$1244. \quad y' = y + z + \frac{1}{x-1}, \quad z' = y + \frac{1}{1-x} z - e^x; \quad y = 1, \quad z = 1$$

при $x=0$.

В задачах 1245, 1246 найти методом Пикара решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

$$1245. \quad y' = y + z - e^{-x}, \quad z' = y - z - e^x; \quad y = 1, \quad z = 1 \text{ при } x = 0.$$

$$1246. \quad y' = y + z - x^3, \quad z' = y + \frac{3}{4} z - e^x; \quad y = e, \quad z = 1 \text{ при } x = 1.$$

В задачах 1247, 1248 доказать, пользуясь теоремой Коши, существование и единственность голоморфного решения, удовлетворяющего поставленным начальным условиям; оценить область сходимости степенных рядов, представляющих решение; найти сво-

бодные члены и коэффициенты при $x-x_0$, $(x-x_0)^2$ и $(x-x_0)^3$ в разложениях решения в ряды по степеням $x-x_0$.

$$1247. y' = (1/x)z, z' = -y + 1; y = 2, z = -1 \text{ при } x = 1.$$

$$1248. y' = y + z - \sin x, z' = y + \cos x - e^x; y = 1, z = 0 \text{ при } x = 0.$$

В задачах 1249, 1250 найти голоморфное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

$$1249. y' = -z + 1, z' = y - x; y = 1, z = 0 \text{ при } x = 0.$$

$$1250. y' = z + \frac{x-1}{x-2}, z' = \frac{1}{2-x}z; y = 1, z = 1 \text{ при } x = 1.$$

В задачах 1251, 1252 для линейной системы уравнений найти (пользуясь теоремой Пикара и теоремой Коши) и сравнить оценки области существования решения и области сходимости степенных рядов, представляющих решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

$$1251. y' = \frac{1}{x-2}y + \frac{1}{x^2+1}z - x, z' = y; y = y_0, z = z_0 \text{ при } x = 0.$$

$$1252. y' = y + \frac{1}{x+1}z, z' = \frac{1}{x^2+1}y + \frac{1}{x}; y = y_0, z = z_0 \text{ при } x = 1.$$

В задачах 1253, 1254 определить, какова степень произвола выбора начальных данных, при которых задача Коши заведомо имеет единственное решение. Оценить область существования решения и область сходимости степенных рядов, представляющих решение.

$$1253. y' = y + \frac{1}{1-x^2}z, z' = -y + x.$$

$$1254. y' = \frac{1}{1+x^3}y + xz - 1, z' = y - x^2z + x.$$

В задачах 1255, 1256 найти методом Пикара второе приближение к решению, удовлетворяющему поставленным начальным условиям.

$$1255. y'' + 2xy = 0; y = 2, y' = 3 \text{ при } x = 1.$$

$$1256. y'' - xy = 0; y = 1, y' = 0 \text{ при } x = 0.$$

В задачах 1257, 1258 найти методом Пикара решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

$$1257. y'' - 2xy' - 2y = 0; y = 1, y' = 0 \text{ при } x = 0.$$

$$1258. y'' + xy' - (2x^2 + 1)y = 0; y = 1, y' = 0 \text{ при } x = 0.$$

В задачах 1259—1270 проинтегрировать систему уравнений и, где указано, выделить решения, удовлетворяющие поставленным начальным условиям.

$$1259. y' + \frac{2}{x^2}z = 1, z' + y = x; y = 2, z = 1 \text{ при } x = 1.$$

1260. $y' = 5y + 4z$, $z' = 4y + 5z$; $y = 2$, $z = 0$ при $x = 0$.

1261. $\dot{y}_1 = 5y_1 + y_2$, $\dot{y}_2 = 5y_2 + y_3$, $\dot{y}_3 = 5y_3$, $\dot{y}_4 = 2y_4$, $\dot{y}_5 = y_5 + y_6$,
 $\dot{y}_6 = y_5 + 3y_6$; $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$ при $t = 0$.

$$1262. \begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$$

$$1263. \begin{cases} y'_1 = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ y'_2 = -y_1 + 5y_2 - y_3, \\ y'_3 = y_1 - y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

$$1264. \begin{cases} y' = 4y - z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$$

$$1265. \begin{cases} y'_1 = y_2 + y_3, \\ y'_2 = y_1 + y_2 - y_3, \\ y'_3 = y_2 + y_3. \end{cases}$$

$$1266. \begin{cases} y'_1 = -y_1 + y_2 + y_3, \\ y'_2 = y_1 - y_2 + y_3, \\ y'_3 = y_1 + y_2 - y_3. \end{cases}$$

$$1267. \begin{cases} xy' = 5y + 4z, \\ xz' = 4y + 5z. \end{cases}$$

$$1268. \begin{cases} y' = 2y + 3z + 2x, \\ z' = -y - 2z + x^2. \end{cases}$$

1269. $y' = 2y + 4z + \cos x$, $z' = -y - 2z + \sin x$; $y = -2$, $z = 0$ при $x = 0$.

1270. $y'' + 2z = 0$, $z'' - 2y = 0$; $y = 0$, $y' = 1$, $z = 0$, $z' = 1$ при $x = 0$.

В задачах 1271—1276 исследовать на устойчивость (при $t \rightarrow +\infty$) нулевое решение системы уравнений.

$$1271. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y. \end{cases}$$

$$1272. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

$$1273. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 5y. \end{cases}$$

$$1274. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -14x - 5y. \end{cases}$$

$$1275. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

$$1276. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

В задачах 1277—1282 проинтегрировать матричным методом систему уравнений.

$$1277. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -8y_1 - 5y_2. \end{cases}$$

$$1278. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 4y_1 - 4y_2. \end{cases}$$

$$1279. \begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_2 + y_3, \\ y_3' = -2y_3. \end{cases}$$

$$1280. \begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

$$1281. \begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 - y_2 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2 - y_3. \end{cases}$$

$$1282. \begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + y_3. \end{cases}$$

В задачах 1283—1288 для уравнения с однородной дробно-линейной правой частью

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy} \quad (ad - bc \neq 0)$$

определить тип особой точки $x=0, y=0$; привести уравнение к каноническому виду; построить схему расположения интегральных кривых канонического и заданного уравнений в окрестности особой точки и исследовать на устойчивость нулевое решение $x \equiv 0, y \equiv 0$ автономной системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

соответствующей данному уравнению, указав стрелками направления движений по траекториям при $t \rightarrow +\infty$.

$$1283. \frac{dy}{dx} = \frac{-x - 2y}{3x + 4y} \quad 1284. \frac{dy}{dx} = \frac{3x + 4y}{-x - 2y}$$

$$1285. \frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{2x - 3y} \quad 1286. \frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{2x - y}$$

$$1287. \frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x - 2y} \quad 1288. \frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y}{4x - y}$$

1289. Исследовать на устойчивость нулевое решение $x \equiv 0, y \equiv 0$, определяемое системой (14), в случае, когда $ad - bc = 0$, приведя эту систему к каноническому виду.

ВІІ. УРАВНЕНІЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. ВВЕДЕНИЕ

Поняііе об уравненіи с частными производными и его решении. Равенство, содержащее неизвестную функцию от нескольких независимых переменных, сами независимые переменные и частные производные неизвестной функции по независимым переменным, называется *уравненіем с частными производными*. Порядок старшей частной производной, входящей в состав уравнения, называется *порядком* уравнения. Уравнение с частными производными, так же как и обыкновенное уравненіе, может быть неполным, но оно обязательно должно содержать хотя бы одну из частных производных неизвестной функции.

Приведем несколько примеров уравнений с частными производными:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= f(x, y, z), \quad x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad x \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \\ x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= 2z, \quad x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = mu, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.\end{aligned}$$

Первые пять уравнений являются уравнениями с частными производными первого порядка, последние три — уравнения с частными производными второго порядка.

Функция, имеющая соответствующие частные производные (которые мы будем предполагать непрерывными) и обращающая уравнение с частными производными в тождество, называется *решеніем* этого уравнения. Процесс нахождения решений называется *интегрированием*. Обычно, интегрируя уравненія с частными производными, находят семейство решений, зависящее от произвольных функций, а не только от произвольных постоянных, как это имеет место в случае обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если уравнение содержит неизвестную функцию z , зависящую только от двух независимых переменных x и y , то его решению $z=z(x, y)$ соответствует некоторая поверхность в пространстве

(x, y, z) . Эта поверхность называется *интегральной поверхностью* данного уравнения, которую по аналогии с обыкновенным дифференциальным уравнением мы называем *графиком* решения. Например, для уравнения

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

функция $z = x^2 + y^2$ будет решением, заданным при всех значениях x и y . Геометрически этому решению соответствует параболоид вращения с осью вращения Oz . Решением уравнения (1) будет также

$$z = F(x^2 + y^2), \quad (2)$$

где F — любая непрерывно дифференцируемая функция, так что уравнение (1) имеет семейство решений, зависящее от произвольной функции. Геометрически семейству решений (2) соответствует семейство поверхностей вращения с осью вращения Oz .

Понятие о линейном уравнении с частными производными первого порядка. Линейное уравнение с частными производными первого порядка имеет следующий общий вид:

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \\ + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \quad (3)$$

где u — неизвестная функция от независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; $X_1, X_2, \dots, X_n, R$ — заданные функции своих аргументов.

Если искомая функция u не входит ни в один из коэффициентов $X_1, X_2, \dots, X_n$ уравнения (3), а его правая часть тождественно равна нулю, то уравнение (3) называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Задача Коши. Одной из важнейших задач, которые ставились в предыдущих главах для обыкновенных дифференциальных уравнений, была задача Коши — задача нахождения решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Эта задача ставится и для уравнений с частными производными.

Для уравнения (3) *задача Коши* ставится так: среди всех решений этого уравнения найти такое решение

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

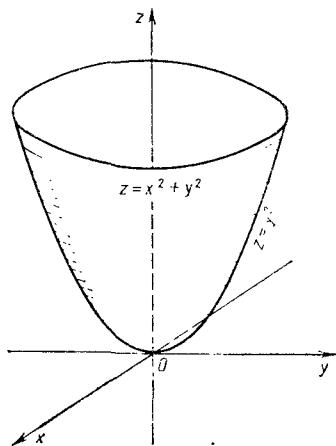


Рис. 53

которое удовлетворяет *начальному условию*

$$u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n = x_n^{(0)},$$

где $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов.

В случае уравнения

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$$

задача Коши состоит в нахождении решения

$$z = f(x, y), \quad (4)$$

удовлетворяющего *начальному условию*

$$z = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = x_0.$$

Геометрически здесь речь идет о нахождении интегральной поверхности (4), проходящей через заданную кривую $z = \varphi(y)$, $x = x_0$, лежащую в плоскости $x = x_0$.

Например, для уравнения (1) решением, удовлетворяющим *начальному условию* $z = y^2$ при $x = 0$, будет функция $z = x^2 + y^2$. Геометрически этому решению соответствует параболоид вращения, проходящий через параболу $z = y^2$, лежащую в плоскости (y, z) (рис. 53).

2. ОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

Построение общего решения. Рассмотрим *однородное* линейное уравнение

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \\ + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

(Здесь правая часть тождественно равна нулю и коэффициенты $X_1, X_2, \dots, X_n$ не зависят от искомой функции u .)

Предполагаем, что коэффициенты $X_1, X_2, \dots, X_n$ уравнения (1) непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности заданной точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ и, кроме того, не обращаются в этой точке одновременно в нуль. Будем считать, что

$$X_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0.$$

Заметим, что однородное уравнение (1) всегда имеет решение $u = c$, где c — любое постоянное число. Такие решения называются *очевидными*.

При сделанных предположениях однородное уравнение (1) име-

ет семейство решений, содержащее произвольную функцию. Это семейство решений может быть найдено следующим образом.

Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} &= \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \\ &= \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Она называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме, соответствующей однородному линейному уравнению с частными производными (1)*.

Система (2) имеет $n-1$ независимых интегралов:

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \dots, \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (3)$$

определенных в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Каждый из них является решением уравнения (1). Любая непрерывно дифференцируемая функция от них $\psi = F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ будет интегралом системы (2) и, следовательно, решением уравнения (1).

Таким образом, уравнение (1) имеет семейство решений

$$u = F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}).$$

Это семейство решений, зависящее от произвольной функции F , называется *общим решением* уравнения (1).

В случае уравнения с двумя независимыми переменными

$$P(x, y) \frac{dz}{dx} + Q(x, y) \frac{dz}{dy} = 0 \quad (4)$$

система (2) вырождается в одно уравнение

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}.$$

Если $\psi(x, y)$ есть интеграл этого уравнения, то общим решением уравнения (4) будет

$$z = F(\psi(x, y)),$$

где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Решение задачи Коши. Пусть требуется найти решение $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющее начальному условию $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ при $x_n = x_n^{(0)}$.

Положим в интегралах (3) системы (2) $x_n = x_n^{(0)}$ и обозначим полученные функции через $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}$:

[illegible]

Разрешим систему (5) относительно $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \omega_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \\ x_2 &= \omega_2(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}), \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}). \end{aligned} \right\}$$

Подставим в правую часть равенства $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ вместо $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ функции $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$, заменив в них $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{n-1}$ на $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$. Получим функцию

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \omega_2(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})). \quad (6)$$

Эта функция и дает искомое решение (почему?).

В случае уравнения (4) с двумя независимыми переменными задача Коши состоит (см. § 1) в нахождении решения $z = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $z = \varphi(y)$ при $x = x_0$. Система (5) сводится к одному уравнению $\psi(x_0, y) = \bar{\psi}$, откуда находим $y = \omega(\bar{\psi})$.

Искомым решением будет

$$z = \varphi(\omega(\psi(x, y))).$$

Примеры. 1. Найти общее решение уравнения

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

и выделить решение, удовлетворяющее пачальному условию

$$u = y + z^2 \quad \text{при } x = 1. \quad (8)$$

Составляем систему

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z/2}. \quad (9)$$

Интегрируя ее, находим $y/x = C_1$, $z^2/x = C_2$, так что система (9) имеет независимые интегралы:

$$\psi_1 = y/x, \quad \psi_2 = z^2/x. \quad (10)$$

Следовательно, общим решением уравнения (7) будет

$$u = F(y/x, z^2/x). \quad (11)$$

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (8). Полагая в интегралах (10) $x = 1$, имеем $y = \psi_1$, $z^2 = \psi_2$, откуда $y = \psi_1$, $z = \pm \sqrt{\psi_2}$. Следовательно, искомым решением, согласно формуле (6), будет $u = \psi_1 + \psi_2$ или $u = (y \pm z^2)/x$. Это решение содержится в общем решении (11) при $F(\psi_1, \psi_2) = \psi_1 + \psi_2$.

2. Найти общее решение уравнения

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (y > 0) \quad (12)$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальному условию $z = 2y$ при $x = 0$.

Интегрируя уравнение $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$, находим: $x^2 - y^2 = C$, $\psi = x^2 - y^2$. Поэтому общим решением уравнения (12) будет

$$z = F(x^2 - y^2).$$

Решаем предложенную задачу Коши: $-y^2 = \bar{\psi}$, $y = \sqrt{-\bar{\psi}}$. Искомым решением будет

$$z = 2\sqrt{-\bar{\psi}} \quad \text{или} \quad z = 2\sqrt{y^2 - x^2}.$$

В задачах 1290—1298 проинтегрировать уравнение и, где указано, найти решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию.

$$1290. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + yz \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad u = x^y \quad \text{при} \quad z = 1.$$

$$1291. \quad \frac{\partial u}{\partial x} - (y + 2z) \frac{\partial u}{\partial y} + (3y + 4z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$1292. \quad (z - y)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad u = 2y(y - z) \quad \text{при} \quad x = 0.$$

$$1293. \quad (mz - ny) \frac{\partial u}{\partial x} + (nx - lz) \frac{\partial u}{\partial y} + (ly - mx) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$1294. \quad (1 + x^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad z = y^2 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

$$1295. \quad y \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad u = \ln z - \frac{1}{y} \quad \text{при} \quad x = 1.$$

$$1296. \quad (x^3 + 3xy^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$1297. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + (z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$1298. \quad x(y^2 - z^2) \frac{\partial u}{\partial x} - y(x^2 + z^2) \frac{\partial u}{\partial y} + z(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. НЕОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

Построение общего решения. Интегрирование неоднородного линейного уравнения

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \\ + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \quad (1)$$

где функции $X_1, X_2, \dots, X_n$ и R непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности заданной точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)})$, причем

$$X_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)}) \neq 0,$$

приводится к интегрированию следующей соответствующей ему системы обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{R}.$$

Если

$$\psi_1(x_1, \mathbf{x}_2, \dots, x_n, u), \dots, \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \quad (2)$$

суть независимые интегралы этой системы, то равенство

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = 0,$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, называется *общим решением* уравнения (1) в неявной форме. Разрешив его относительно u , получим общее решение в явной форме.

Решение задачи Коши. Пусть требуется найти решение $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющее начальному условию $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ при $x_n = x_n^{(0)}$.

Положим в интегралах (2) $x_n = x_n^{(0)}$ и обозначим полученные функции через $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n$:

[illegible]

Разрешим систему (3) относительно $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u$:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \omega_1 (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n), \\ x_2 &= \omega_2 (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n), \\ . &. \\ x_{n-1} &= \omega_{n-1} (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n), \\ u &= \omega (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n). \end{aligned} \right\}$$

Подставим в равенство $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ вместо $u, x_1, x_2, \dots,$

x_{n-1} функции $\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$, заменив в них $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_n$ на $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. Получим:

$$\omega(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \varphi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n),$$

$$\omega_2(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)).$$

Эта формула дает искомое решение задачи Коши в неявной форме (почему?).

Примеры. 1. Найти общее решение уравнения

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = z \quad (4)$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальному условию

$$z = y - 4 \quad \text{при } x = 2. \quad (5)$$

Составляем соответствующую уравнению (4) систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2} = \frac{dz}{z}.$$

Ищем ее независимые интегралы. Интегрируя уравнение

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2},$$

получаем:

$$y = x(C_1 + x), \quad \frac{y - x^2}{x} = C_1, \quad \psi_1 = \frac{y - x^2}{x}.$$

Уравнение $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$ дает $z/x = C_2$, $\psi_2 = z/x$. Общим решением уравнения (4) будет

$$\Phi\left(\frac{y - x^2}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$$

или (разрешая относительно z)

$$z = x f\left(\frac{y - x^2}{x}\right). \quad (6)$$

Найдем решение, удовлетворяющее начальному условию (5). Полагая в интегралах ψ_1 и ψ_2 $x=2$, имеем:

$$\frac{y - 4}{2} = \bar{\psi}_1, \quad \frac{z}{2} = \bar{\psi}_2,$$

откуда $y = 2\bar{\psi}_1 + 4$, $z = 2\bar{\psi}_2$. Подставляем эти значения y и z в формулу $z = y - 4$, заменяя $\bar{\psi}_1$ и $\bar{\psi}_2$ на ψ_1 и ψ_2 :

$$2\psi_2 = 2\psi_1 + 4 - 4, \quad \psi_2 = \psi_1, \quad \frac{z}{x} = \frac{y - x^2}{x},$$

так что искомым решением будет

$$z = y - x^2.$$

Это решение содержится в общем решении (6) при $f(t) \equiv t$.

2. Найти общее решение уравнения

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (x > 0). \quad (7)$$

Это уравнение является неоднородным, ибо, хотя правая часть тождественно равна нулю, искомая функция z входит в один из коэффициентов уравнения.

Следуя общему правилу, составляем систему

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-z} = \frac{dz}{0}.$$

Интегрируем ее:

$$dz = 0, \quad z = C_1; \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-C_1}, \quad \ln x = -\frac{y}{C_1} + C_2,$$

$$\ln x + y/z = C_2,$$

так что $\psi_1 = z$, $\psi_2 = \ln x + y/z$. Поэтому общим решением уравнения (7) будет

$$\Phi(z, \ln x + y/z) = 0.$$

В задачах 1299—1307 проинтегрировать уравнение и, где указано, найти решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию.

$$1299. \quad \frac{\partial z}{\partial x} + (2y - z) \frac{\partial z}{\partial y} = y + 2z.$$

$$1300. \quad yz \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad z = x^2 \text{ при } y = 1.$$

$$1301. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} = z, \quad z = z(x, y); \quad z = y \text{ при } x = 1.$$

$$1302. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} = z. \quad 1303. \quad \sqrt{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}.$$

$$1304. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u; \quad u = \frac{1}{2} (y + z) \text{ при } x = 2.$$

$$1305. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad z = -y \text{ при } x = 1.$$

$$1306. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z; \quad z = y \text{ при } x = 1.$$

$$1307. \quad (z - y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x - z) \frac{\partial z}{\partial y} + x - y = 0.$$

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Система двух нелинейных уравнений первого порядка.
Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= A(x, y, z), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= B(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

правые части которой непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности заданной точки (x_0, y_0, z_0) . Эта система называется *совместной*, если существует функция $z = z(x, y)$, обращающая оба уравнения системы (1) в тождества в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) .

Для того чтобы система (1) имела семейство решений, зависящее хотя бы от одной произвольной постоянной, необходимо и достаточно, чтобы условие

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A \quad (2)$$

выполнялось тождественно относительно x, y, z в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) . Условие (2) называется *условием полной интегрируемости системы* (1).

Если условие (2) выполнено, то решение системы (1) ищется по следующей схеме.

Фиксируя в первом из уравнений (1) переменную y и интегрируя полученное уравнение, находим

$$z = \varphi(x, C(y)), \quad (3)$$

где $C(y)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от y . Выбираем $C(y)$ так, чтобы функция (3) удовлетворяла и второму из уравнений (1). Выполнение условия полной интегрируемости системы (1) гарантирует возможность такого выбора $C(y)$. В результате мы получим

$$z = z(x, y, C), \quad (4)$$

где C — произвольная постоянная.

Уравнение Пфаффа. Уравнение вида

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0 \quad (5)$$

называется *уравнением Пфаффа*.

Предположим, что функции P, Q, R непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности заданной точки (x_0, y_0, z_0) и хотя бы одна из них отлична от нуля в этой точке. Пусть $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} dz &= -\frac{P}{R} dx - \frac{Q}{R} dy, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{P}{R} dx - \frac{Q}{R} dy,$$

и так как dx и dy независимы, то искомая функция z должна удовлетворять системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{P}{R}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{Q}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Записав для системы (6) условие полной интегрируемости (2), придем к уравнению, которое можно преобразовать к виду (см., например, [7, с. 347; 8, с. 743])

$$P \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + Q \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

или

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0.$$

Если условие (7) выполняется тождественно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) , то оно называется *условием полной интегрируемости* уравнения Пфаффа. При выполнении этого условия интегрирование уравнения Пфаффа приводится к интегрированию системы (6), в результате чего получается семейство решений вида (4), содержащее одну произвольную постоянную.

Метод Лагранжа—Шарпи. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (8)$$

где $z = z(x, y)$ — искомая функция; $p = \partial z / \partial x$; $q = \partial z / \partial y$; F — заданная функция от своих аргументов.

Семейство решений уравнения (8), заданное в виде

$$V(x, y, z, a, b) = 0 \quad \text{или} \quad z = \varphi(x, y, a, b),$$

где a и b — произвольные постоянные, называется *полным интегралом* уравнения (8). Исключив a и b из системы

$$\left. \begin{aligned} V(x, y, z, a, b) &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} p &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} z &= \varphi(x, y, a, b), \\ p &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ q &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

мы получим уравнение, эквивалентное уравнению (8).

Полный интеграл уравнения (8) может быть найден следующим методом Лагранжа — Шарпи (см. [7, с. 349—351; 8, с. 745—748]).

Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{dp}{-(X + Zp)} = \frac{dq}{-(Y + Zq)},$$

где $P = F'_p$; $Q = F'_q$; $X = F'_x$; $Y = F'_y$; $Z = F'_z$. Ищем ее первый интеграл $\Phi(x, y, z, p, q) = a$. Составляем систему

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= 0, \\ \Phi(x, y, z, p, q) &= a \end{aligned} \right\}$$

и, разрешая ее относительно p и q , приходим к системе

$$\left. \begin{aligned} p &= A(x, y, z, a), \\ q &= B(x, y, z, a), \end{aligned} \right\}$$

интегрируя которую, мы и получаем полный интеграл уравнения (8).

Примеры. 1. Пусть дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + y \right) z, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x \right) z. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Проверяем условие (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B &= \left(-\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + 1 \right) z + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + y \right) \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x \right) z, \\ \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A &= \left(-\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + 1 \right) z + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x \right) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + y \right) z. \end{aligned}$$

Следовательно, условие (2) выполнено тождественно на всей плоскости (x, y) , кроме начала координат, так что система (9) вполне интегрируема.

Следуя указанной выше схеме, найдем решение системы (9), содержащее одну произвольную постоянную.

Первое из уравнений (9) при фиксированном y даст

$$z = C(y) e^{yx} \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (10)$$

Выберем $C(y)$. Подставляем функцию (10) во второе из уравнений (9):

$$\begin{aligned} C'(y) e^{yx} \sqrt{x^2 + y^2} + C(y) x e^{yx} \sqrt{x^2 + y^2} + C(y) e^{yx} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x \right) C(y) e^{yx} \sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

откуда $C'(y) = 0$, так что $C(y) = C = \text{const.}$ Следовательно, искомым решением будет

$$z = Ce^{yx} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. Рассмотрим уравнение Пфаффа

$$\frac{2(x+y)}{z} dx + \frac{2(x+y)}{z} dy - \left(\frac{x+y}{z}\right)^2 dz = 0. \quad (11)$$

Проверяем условие полной интегрируемости (7):

$$\begin{aligned} \frac{2(x+y)}{z} \left(-\frac{2(x+y)}{z^2} + \frac{2(x+y)}{z^2} \right) + \frac{2(x+y)}{z} \left(-\frac{2(x+y)}{z^2} + \frac{2(x+y)}{z^2} \right) - \\ - \left(\frac{x+y}{z} \right)^2 \left(\frac{2}{z} - \frac{2}{z} \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (11) вполне интегрируемо. Интегрируя соответствующую ему систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2z}{x+y}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{2z}{x+y}, \end{aligned} \right\}$$

получаем:

$$z = C(y)(x+y)^2; \quad C'(y)(x+y)^2 + C(y)2(x+y) = 2C(y)(x+y);$$

$$C'(y) = 0, \quad C(y) = C,$$

так что

$$z = C(x+y)^2.$$

Это и есть искомое решение уравнения (11).

3. Найти полный интеграл уравнения

$$z^2(1+p^2+q^2) = R^2 \quad (R = \text{const}) \quad (12)$$

методом Лагранжа — Шарпи.

Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую этому уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{2z^2p} = \frac{dy}{2z^2q} = \frac{dz}{2z^2(p^2+q^2)} = \frac{dp}{-(2z(1+p^2+q^2))p} = \\ = \frac{dq}{-(2z(1+p^2+q^2))q}. \end{aligned}$$

В качестве интересующего нас первого интеграла этой системы можно взять $p/q = a$.

Решаем систему

$$\left. \begin{aligned} z^2(1+p^2+q^2) &= R^2, \\ p/q &= a \end{aligned} \right\}$$

относительно p и q :

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \frac{\sqrt{R^2-z^2}}{z}, \\ q &= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \frac{\sqrt{R^2-z^2}}{z}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Интегрируя систему (13), находим

$$\sqrt{R^2 - z^2} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} x + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} y + b = 0.$$

Это и есть полный интеграл уравнения (12).

В задачах 1308—1311 проинтегрировать систему уравнений, доказав предварительно, что она вполне интегрируема.

$$1308. \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = yz, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = xz. \end{cases}$$

$$1309. \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = yz \cos(xy), \\ \frac{\partial z}{\partial y} = xz \cos(xy). \end{cases}$$

$$1310. \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = z^2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2yz^2. \end{cases}$$

$$1311. \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = z, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y} + z. \end{cases}$$

В задачах 1312—1314 проинтегрировать уравнение Пфаффа, доказав предварительно, что оно вполне интегрируемо.

$$1312. yzdx - xzdy + x^2dz = 0. \quad 1313. yzdx + (e^{xy} + xz)dy - dz = 0.$$

$$1314. (x^2 + 2z - x^3)dx + x^3dy - xdz = 0.$$

В задачах 1315—1317 найти полный интеграл уравнения методом Лагранжа—Шарпи.

$$1315. z = px + qy + p^2. \quad 1316. z = px + qy + pq. \quad 1317. p = 2zq^2.$$

5. ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вопросы

1. Что такое дифференциальное уравнение с частными производными? Что называется его решением? Какой геометрический смысл имеет решение уравнения с двумя независимыми переменными?

2. Какое уравнение называется линейным уравнением с частными производными первого порядка? В каком случае оно называется однородным; неоднородным?

3. Как ставится задача Коши для уравнения с частными производными первого порядка? Какой геометрический смысл она имеет в случае двух независимых переменных?

4. Как построить общее решение однородного линейного уравнения с частными производными первого порядка? Как решается задача Коши для этого уравнения?

5. Как построить общее решение неоднородного линейного уравнения с частными производными первого порядка? Как решается задача Коши для этого уравнения?

6. При каком условии нормальная система двух уравнений с

частными производными вполне интегрируема? Как интегрируется эта система при выполнении условия полной интегрируемости?

7. Какой вид имеет уравнение Пфаффа? При каком условии оно вполне интегрируемо? Как интегрируется это уравнение?

8. Что называется полным интегралом нелинейного уравнения с частными производными первого порядка? В чем состоит метод Лагранжа—Шарпи нахождения полного интеграла этого уравнения?

Задачи

В задачах 1318—1328 найти общее решение уравнения и, где указано, выделить решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

$$1318. x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

$$1319. x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = mu \quad (m \neq 0).$$

$$1320. x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0; u = y + z \text{ при } z = 1.$$

$$1321. x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u; u = y + z \text{ при } x = 1.$$

$$1322. y \frac{\partial u}{\partial x} - xz \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$1323. \frac{\partial z}{\partial x} + yz = 0. \quad 1324. z \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$1325. x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0; z = y^2 \text{ при } x = 1.$$

$$1326. x \frac{\partial z}{\partial y} = z; z = \sin y \text{ при } x = 1; z = x \text{ при } y = 1.$$

$$1327. \frac{\partial z}{\partial x} = z; z = y \text{ при } x = 1.$$

$$1328. \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}; z = y + 1 \text{ при } x = 0.$$

В задачах 1329—1332 найти интегральные поверхности, проходящие через заданные кривые.

$$1329. y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0; z = y, x = 0; z = y^2, x = 0; z = \sqrt{R^2 - y^2},$$

$x = 0; z = 1, x = 0; z^2 - y^2 = 1, [x = 0; z = x, y = 1; x^2/4 + z^2 = 1, y = 0. \text{ Сделай рисунки.}$

$$1330. x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x - y; x = a, z = y^2 + a^2.$$

$$1331. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2; \quad y = a, \quad z = x^2 - a^2.$$

$$1332. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2; \quad x = a, \quad z = 1 + 2y + 3y^2.$$

●1333. Проинтегрировать систему уравнений, доказав предварительно, что она интегрируема:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2z}{x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{3z}{y}. \end{aligned} \right\}$$

1334. Проинтегрировать уравнение Пфаффа, доказав предварительно, что оно вполне интегрируемо: $zdx + ((x - y^2)^2 - 2yz) dy + (y^2 - x) dz = 0$.

1335. Найти, пользуясь методом Лагранжа—Шарпи, полный интеграл уравнения $z = px + qy - p^2q$.

VIII. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1136. Дано уравнение $dy/dx = f(x)$, где f непрерывна в $[a, +\infty)$ (или в $(-\infty, a]$) и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (или $\int_{-\infty}^a f(x) dx$) сходится. Доказать, что интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0) , где $x_0 \geq a$ (или $x_0 \leq a$), а y_0 — любое заданное число, имеет горизонтальную асимптоту $y = y_0 + b$, $b = \int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx$ (или $y = y_0 - b$, $b = \int_{-\infty}^{x_0} f(x) dx$).

1137. Используя результат предыдущей задачи, выяснить, при каких значениях λ интегральная кривая уравнения $dy/dx = x^\lambda$, проходящая через точку (x_0, y_0) , где x_0 принадлежит области задания функции f , а y_0 произвольно, имеет горизонтальную асимптоту.

1138. Дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad (1)$$

где f непрерывна во всех точках интервала (a, b) , кроме точки $x = \xi$, $a < \xi < b$, причем $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \xi$. Тогда $x = \xi$ есть решение перевернутого уравнения [9, с. 17 — 21]

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}, \quad (1')$$

которое мы присоединяем к решениям уравнения (1). Доказать, что если интегралы

$$\int_a^\xi f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_\xi^b f(x) dx \quad (2)$$

расходятся, то $x = \xi$ — частное решение, если же оба этих интеграла сходятся, то $x = \xi$ — особое решение. Сделать рисунки в случаях, когда $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \xi \pm 0$, $f(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow \xi - 0$, $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \xi + 0$. Пронтегрировать уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Сделать рисунки.

1339. Доказать, что если хотя бы один из интегралов (2) сходится, то $x = \xi$ — особое решение. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} x^{-1/3}, & x < 0, \\ 1/x^2, & x > 0. \end{cases}$$

Сделать рисунок.

1340. Дано уравнение $dy/dx = x^\lambda$. Указать, при каких значениях λ перевернутое уравнение имеет решение $x = 0$. Исследовать, пользуясь результатом задачи 1338, при каких значениях λ это решение будет особым.

1341. Дано уравнение $dy/dx = f(y)$, в котором f непрерывна и не обращается в нуль в (c, d) . Доказать, пользуясь теоремой о существовании неявной функции, что уравнение $\int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)} = x - x_0$ определяет единственное решение $y = y(x)$ данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$, где $y_0 \in (c, d)$, а x_0 — любое заданное число.

1342. Пусть в уравнении $dy/dx = f(y)$ правая часть f непрерывна в (c, d) и $f(\eta) = 0$, $\eta \in (c, d)$. Тогда $y = \eta$ — решение. Доказать, что это решение будет частным, если интегралы $\int_c^\eta \frac{dy}{f(y)}$ и $\int_\eta^d \frac{dy}{f(y)}$ расходятся, и особым, если хотя бы один из них сходится. Сделать рисунки.

1343. Дано уравнение $dy/dx = y^\lambda$. Указать, при каких значениях λ оно имеет решение $y = 0$. Исследовать, пользуясь результатом предыдущей задачи, при каких значениях λ это решение будет особым. Изучить и сравнить поведение интегральных кривых уравнений $dy/dx = \sqrt[3]{|y|}$ и $dy/dx = \sqrt[3]{y}$; сделать рисунки.

1344. Изучить поле направлений, определяемое дифференциальным уравнением $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x^2)(1-y^2)}{xy}$ (см. задачу 153). Проинтегрировать уравнение и исследовать поведение интегральных кривых в окрестности особых точек $(0, 1)$ и $(0, -1)$, при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow \pm\infty$. Существует ли решение с начальным условием $y(x_0) = 0$, $x_0 \neq 0$?

В задачах 1345 — 1351 проинтегрировать уравнение, приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными, с помощью замены искомой функции.

1345. $y(1+xy)dx + x(1-xy)dy = 0$. 1346. $(x^2 - y^4)y' - xy = 0$.

1347. $(xy' - y)f(x) = y^2 - x^2$. 1348. $y' = y/x + x^\lambda f(y/x)$.

1349. $y' = f(x)g\left(\frac{y-b}{x-a}\right) + \frac{y-b}{x-a}$.

$$1350. y' = y^2 f(xy).$$

$$1351. y' + y/x = \varphi(x) f(xy).$$

1352. Решить функциональное уравнение

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}.$$

(У к а з а н и е. Найти $f(0)$. Далее, предполагая, что $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки $x=0$, продифференцировать обе части данного уравнения по y и положить $y=0$. Решить полученное дифференциальное уравнение с учетом начального условия.)

$$1353. \text{Решить функциональное уравнение } f(x+y) = f(x)f(y).$$

1354. Показать, что правая часть уравнения $y' = \frac{y-b}{x-a}$ есть его интеграл, и написать общий интеграл этого уравнения.

1355. Показать, что уравнение $a(xdy - ydx) + (b + b_1x + b_2y)dy + (c + c_1x + c_2y)dx = 0$ приводится к однородному или к уравнению с разделяющимися переменными.

1356. Проинтегрировать уравнение $dy/dx + y = f(\sin x - y)$, где

$$f(z) = \begin{cases} z, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

Найти решение, проходящее через точку $M(0, 1)$.

1357. Угадать частное решение линейного уравнения $y' + y\varphi'(x) = \varphi(x)\varphi'(x)$ и написать его общее решение.

1358. Проинтегрировать уравнение $y' + y \cos x = \sin x \cos x$, угадав его частное решение.

В задачах 1359, 1360 привести уравнение к линейному с помощью замены искомой функции.

$$1359. A(x)\varphi'(y)y' + B(x)\varphi_1(y) + C(x) = 0.$$

$$1360. y^{m-1}y' + p(x)y^m = q(x).$$

1361. Доказать, что касательные к интегральным кривым линейного уравнения $y' + p(x)y = q(x)$, проведенные в точках пересечения этих кривых прямой $x = x_0$, параллельной оси Oy , параллельны, если $p(x_0) = 0$, и пересекаются в одной точке $L(x_0)$ с координатами $\xi = x_0 + \frac{1}{p(x_0)}$, $\eta = \frac{q(x_0)}{p(x_0)}$, если $p(x_0) \neq 0$. (Геометрическое место точек $L(x_0)$ называется *направляющей кривой* [21, с. 36].)

В задачах 1362 — 1366 найти направляющую кривую для уравнения.

$$1362. y' + p(x)y = 0. \quad 1363. y' + y = 0. \quad 1364. y' + 2xy = 0.$$

$$1365. xy' - y = -1/x^2. \quad 1366. y' + (1/x)y = 3x.$$

1367. Найти периодические решения уравнения $y' = y \sin x + \sin 2x$.

В задачах 1368, 1369 показать, что уравнение приводится к линейному.

$$1368. (a + a_1x)(xdy - ydx) + (b + b_1x) dy + (c + c_1x + c_2y) dx = 0.$$

$$1369. (a + a_2y)(xdy - ydx + (b + b_1x + b_2y) dy + (c + c_2y) dx = 0.$$

1370. Исследовать на устойчивость (при $t \rightarrow +\infty$) нулевое решение уравнения $\frac{dx}{dt} + \lambda x = 0$ ($\lambda = \text{const}$).

1371. Дано линейное уравнение $\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t)$, где $p(t) \geq c > 0$ и $q(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Доказать, что любое решение $x = x(t)$ обладает свойством $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ (ср. с задачей 285).

1372. (В. Р. Петухов.) Найти решение линейного уравнения $\frac{dx}{dt} = x \sin \frac{1}{\lambda^2} + \lambda$ с начальным условием $x(0) = 0$ и выяснить, существует ли предел этого решения при $\lambda \rightarrow 0$.

1373. (Н. Н. Петров.) Та же задача для уравнения $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{2} \sin \frac{1}{\lambda} + \lambda$.

1374. (Н. Н. Петров.) Доказать, что для решения $x = x(t, \lambda)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} \frac{x \cos(t/\lambda)}{\lambda^{1-\alpha}} + \frac{\sin(t/\lambda)}{\lambda^{1-\beta}}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0, \end{cases}$$

с начальным условием $x(0, \lambda) = 0$ предельное соотношение $x(t, \lambda) \rightarrow x(t, 0)$ при $\lambda \rightarrow 0$ имеет место равномерно по t на любом конечном интервале для $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta > 1$. (Указание. Проинтегрировать уравнение с учетом начального условия и разложить в ряд экспоненты, входящие в решение. Заметим, что если $\alpha > 1, \beta > 1$, то указанное предельное соотношение следует из классической теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра.)

1375. Дано уравнение $y' + y/x = a \ln x \cdot y^2$. Указать, какова степень произвола выбора начальных данных, при которых решение задачи Коши для него существует и единственно. В каком (максимальном) интервале будет определено решение? Изучить поведение интегральных кривых в окрестности неподвижной особой точки $x = 0$ и подвижной особой точки $\alpha = a(\ln x_0)^2 - \frac{2}{x_0 y_0}, x_0 y_0 \neq 0$.

1376. Привести уравнение $y' + (y^2 - \varphi^2(x))f(x) - \varphi'(x) = 0$ к уравнению Бернулли с помощью замены искомой функции.

В задачах 1377 — 1379 проинтегрировать уравнение Дарбу.

$$1377. (x(x + y) + a^2) y' = y(x + y) + b^2.$$

$$1378. \sqrt{y/x} (dx + dy) + x(xdy - ydx) = 0.$$

$$1379. (1 + x + y)(xdy - ydx) + (x + y) dx + (y - x) dy = 0.$$

В задачах 1380, 1381 проинтегрировать уравнение Якоби, используя метод, указанный ниже.

Известно, что *уравнение Якоби*

$$(a + a_1x + a_2y)(xdy - ydx) - (b + b_1x + b_2y)dy + \\ + (c + c_1x + c_2y)dx = 0 \quad (3)$$

всегда интегрируется в квадратурах [8, с. 103 — 108]. Если $a_1 = a_2 = 0$, то уравнение (3) приводится к однородному или к уравнению с разделяющимися переменными. При $a_2 = b_2 = 0$ или $a_1 = c_1 = 0$ это уравнение приводится к линейному соответственно относительно y или x . В случае $b = c = 0$ уравнение Якоби легко приводится к уравнению Дарбу. В других случаях уравнение Якоби может быть приведено к уравнению Дарбу или к линейному уравнению с помощью переноса начала координат или линейной замены искомой функции. Для этого составляют уравнение

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & a_1 & a_2 \\ b & b_1 - \lambda & b_2 \\ c & c_1 & c_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если существует такой корень λ_1 , что система

$$\begin{cases} (a - \lambda_1)\gamma + a_1\alpha + a_2\beta = 0, \\ b\gamma + (b_1 - \lambda_1)\alpha + b_2\beta = 0, \\ c\gamma + c_1\alpha + (c_2 - \lambda_1)\beta = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение, в котором $\gamma \neq 0$, то, полагая $\gamma = 1$, разрешают систему

$$\begin{cases} a - \lambda_1 + a_1\alpha + a_2\beta = 0, \\ b + (b_1 - \lambda_1)\alpha + b_2\beta = 0, \\ c + c_1\alpha + (c_2 - \lambda_1)\beta = 0 \end{cases} \quad (4)$$

относительно α и β и, сделав в (3) подстановку $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, приходят к уравнению Дарбу. В случае, когда не существует корня λ_1 , обладающего указанным свойством, причем $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, уравнение Якоби подстановкой $a_1x + a_2y = a_2z$ приводится к линейному с неизвестной функцией x . Если же $a_1 = 0$ ($a_2 \neq 0$) или $a_2 = 0$ ($a_1 \neq 0$), то соответственно $a_1 = c_1 = 0$ или $a_2 = b_2 = 0$.

1380. $(14x + 13y + 6)dx + (4x + 5y + 3)dy + (7x + 5y)(ydx - xdy) = 0$.

1381. $(7x + 8y + 5)dx - (7x + 8y)dy + 5(x - y)(ydx - xdy) = 0$.

В задачах 1382, 1383 решить интегральное уравнение.

1382. $y = \lambda \int_{-x}^x (\operatorname{ctg} t + \cos t) y(t) dt, \lambda = \text{const.}$

1383. $\int_0^1 (y'^2(xt) + y^2(xt)) dt = y^2(x)$. (Указание. Сделать подстановку $xt = z$.)

1384. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y^2}{2y(x + y^2)}.$$

(Указание. Записать уравнение в виде $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.)

1385. Найти интегрирующий множитель и проинтегрировать уравнение

$$(2x \operatorname{tg} y \sec x + y^2 \sec y) dx + (2y \operatorname{tg} x \sec y + x^2 \sec x) dy = 0.$$

(Указание. Так как уравнение имеет вид $M(x, y)dx + M(y, x)dy = 0$, то оно допускает интегрирующий множитель $\mu = \varphi(x)\varphi(y)$. Для нахождения φ воспользоваться уравнением (2) на с. 78. Положив в полученном уравнении $y = 0$, найти дифференциальное уравнение для $\varphi(x)$.)

1386. Пусть M — полное метрическое пространство, т. е. множество, в котором введена метрика $d(x, y)$ (расстояние между любыми двумя точками x и y из M), удовлетворяющая трем условиям:

$$1) 0 \leq d(x, y) < +\infty, d(x, y) = 0 \iff x = y;$$

$$2) d(x, y) = d(y, x);$$

$$3) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in M,$$

и всякая фундаментальная последовательность $\{x_n^*\} \subset M$, т. е. последовательность, обладающая свойством $d(x_m^*, x_n^*) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$, сходится к точке $x^* \in M$ ($d(x_n^*, x^*) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$).

Предположим, что в пространстве M задан оператор (отображение) A , действующий из M в M (отображающий M само в себя): $A: M \rightarrow M$, так что $\forall x \in M, A(x) \in M$, и этот оператор есть оператор сжатия (сжатое отображение), т. е.

$$\forall x, y \in M, d(A(x), A(y)) \leq \alpha d(x, y), 0 \leq \alpha < 1.$$

Теорема Банаха (принцип сжатых отображений). При сделанных выше предположениях существует единственная точка $\bar{x} \in M$, для которой $A(\bar{x}) = \bar{x}$ ($\bar{x}$ называется неподвижной точкой отображения A), причем точка $\bar{x}$ может быть найдена методом последовательных приближений [9, с. 48]:

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x_n = A(x_{n-1}) \quad \forall x_0 \in M.$$

Доказать, используя теорему Банаха, существование и единственность решения задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (5)$$

где f непрерывна по совокупности переменных x и y и удовлетворяет условию Липшица по y в R :

$$|f(x, \bar{\bar{y}}) - f(x, \bar{y})| \leq L |\bar{\bar{y}} - \bar{y}|, \quad L > 0 \quad \forall (x, \bar{y}), (x, \bar{\bar{y}}) \in R, \quad (6)$$

$$R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b. \quad (7)$$

(Указание. Достаточно доказать существование и единственность

непрерывного решения интегрального уравнения $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx$,

равносильного задаче Коши (5). В качестве полного метрического пространства взять пространство C — множество функций $\{y(x)\}$, непрерывных на $|x - x_0| \leq h_1 \leq h$, где

$$h = \min(a, b/M), \quad |f(x, y)| \leq M, \quad M > 0 \quad \forall (x, y) \in R.$$

с метрикой

$$d(y, z) = \max_{x_0 - h_1 \leq x \leq x_0 + h_1} |y(x) - z(x)|$$

(убедиться, что C — полное метрическое пространство). Рассмотреть в пространстве C оператор A :

$$A(y) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx.$$

Показать, что $A: C \rightarrow C$, и, убедившись, что A есть оператор сжатия, применить теорему Банаха о неподвижной точке. Неподвижная точка отображения A , т. е. функция $y(x)$, для которой $A(y(x)) = y(x)$, и будет единственным решением указанного интегрального уравнения и тем самым задачи Коши (5) (почему?).

1387. Доказать лемму Гронволла: если $0 \leq u(x) \in C[a, b]$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ — некоторые постоянные, то из условия

$$u(x) \leq \lambda + \mu \left| \int_{x_0}^x u(t) dt \right|, \quad x_0, x \in [a, b],$$

следует, что $u(x) \leq \lambda e^{\mu|x-x_0|}$, $x_0, x \in [a, b]$.

1388. Доказать лемму Гронволла — Беллмана [19, с. 108]: если $0 \leq u(x), v(x) \in C[a, b]$, $\lambda \geq 0$ — некоторая постоянная, то из условия

$$u(x) \leq \lambda + \int_a^x v(t) u(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

следует, что $u(x) \leq \lambda e^{\int_a^x v(t) dt}$, $x \in [a, b]$. В частности, $\lambda = 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0$, $x \in [a, b]$.

1389. Пользуясь леммой Гронуолла, доказать единственность решения задачи Коши, (5), предполагая, что f непрерывна по совокупности аргументов x и y и удовлетворяет условию Липшица (6) относительно y в области (7).

В задачах 1390—1392 выяснить, каким решением для дифференциального уравнения будет $y \equiv 0$: частным или особым.

$$1390. y' = \begin{cases} y \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

$$1391. y' = \begin{cases} \sqrt[3]{y \sin \frac{1}{y}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

$$1392. y' = \begin{cases} \sqrt[3]{\left| y \sin \frac{1}{y} \right|}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

1393. Дано уравнение $dy/dx = f(x, y)$, где f непрерывна на всей плоскости (x, y) и обладает свойством: $f(x, y) > 0$ при $xy < 0$, $f(x, y) < 0$ при $xy > 0$. Доказать, что решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$, существует. Гарантируется ли единственность решения?

1394. (Ю. С. Богданов.) Найти все решения уравнения $F(y') = 0$, где F — произвольная функция.

1395. Дано уравнение $y' = ay^{2n+1} + p_{2n}(x)y^{2n} + \dots + p_1(x)y + f(x)$ ($a \neq 0$), где p_i, f непрерывны и ограничены в $(-\infty, +\infty)$. Доказать, что любое решение $y = y(x)$, $y(x_0) = y_0$ продолжимо либо вправо на $(x_0, +\infty)$, либо влево на $(-\infty, x_0)$.

1396. Доказать, что уравнение $y = \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} y' + f\left(\frac{y'}{\varphi'(x)}\right)$ с помощью замены независимой переменной может быть приведено к уравнению Клеро.

В задачах 1397—1401 проинтегрировать уравнение и там, где указано, выделить интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M(x_0, y_0)$, выяснив предварительно вопрос о существовании и единственности ее, о направлении касательной и направлении вогнутости интегральной кривой в точке M .

1397. $|y'| + y = 1$. Сделать рисунок.

1398. $y' |y'| = -2y$. Сделать рисунок.

1399. $y' = |y| + |x|$; $M(0, 0)$. 1400. $|y'| = |y| + 1$; $M(0, 0)$.

1401. $y' = \operatorname{sign}(x - y) \sqrt{|x - y|}$.

1402. Доказать, что любое решение уравнения $y'' + \left(1 - \frac{a}{x^2}\right)y = 0$ ограничено при $x \rightarrow +\infty$.

1403. Построить однородное линейное уравнение наименьшего порядка, имеющее частные решения $y_1 = e^x$, $y_2 = \operatorname{sh} x$ и $y_3 = \operatorname{ch} x$.

В задачах 1404, 1405 рассматриваются простейшие сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения [23].

1404. Дано уравнение $\varepsilon y'' + y = 1$. Найти решения, ограниченные при $\varepsilon \rightarrow +0$ ($\varepsilon \rightarrow -0$).

1405. Найти решение уравнения $\varepsilon y'' + y = 1$, стремящееся к определенному пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$.

1406. Дано уравнение $x^3 y'' - (x^2 + x) y' + 2y = 0$. Построить фундаментальную систему решений в окрестности точки $x=0$. Изучить поведение фундаментальной системы решений при $x \rightarrow +0$ и при $x \rightarrow -0$. (У к а з а н и е. Найти частное решение в виде полинома.)

1407. При каких значениях λ уравнение $x'' + \lambda x = 0$, $x = x(x)$ имеет ненулевые решения, удовлетворяющие краевым условиям: $x(0) = 0$, $x(l) = 0$. Найти эти решения (ср. задачу 831).

1408. При каких значениях λ уравнение $(1 - x^2) y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ имеет ненулевые решения, конечные в особых точках $x = \pm 1$? Найти эти решения.

1409. При каких значениях λ уравнение $(1 - x^2) y'' - xy' + \lambda y = 0$ имеет ненулевые решения, конечные в особых точках $x = \pm 1$? Найти эти решения.

1410. Доказать, что уравнение Эйри $y'' - xy = 0$ имеет фундаментальную систему решений:

$$y_1 = x^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} i x^{3/2} \right), \quad y_2 = x^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} i x^{3/2} \right).$$

1411. Дано уравнение $y'' + q(x)y = 0$, где $q(-x) = -q(x)$. Доказать, что если $y = \varphi(x)$ — решение этого уравнения, то $y = \varphi(-x)$ тоже будет его решением.

1412. Доказать, что уравнение Эйри — Фока $y'' + xy = 0$ имеет фундаментальную систему решений $y_1 = Ai(-x)$, $y_2 = Bi(-x)$.

1413. Дано уравнение $\ddot{x} + g(x) = 0$, где $g(-x) = -g(x)$. Доказать, что период колебаний решения с начальными условиями: $x(0) = a > 0$, $\dot{x}(0) = 0$ выражается формулой [26, с. 96]

$$T(a) = 2\sqrt{2} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{G(a) - G(x)}}, \quad G(x) = \int_0^x g(x) dx.$$

1414. Доказать, что период колебаний математического маятника, движение которого описывается нелинейным дифференциальным уравнением $\ddot{\varphi} = -(g/l) \sin \varphi$, где φ — угол отклонения оси маятника от вертикального положения равновесия, выражается формулой

$$T = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_1}}, \quad \varphi_1 = \varphi(0).$$

1415. Привести уравнение $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 F(y/x)$ к виду $z'' = F(z)$ с помощью замены искомой функции.

1416. Пусть дана однородная линейная система [8, с. 714]

$$\frac{dz}{dx} = P(x)z, \quad (8)$$

где $z = (z_1, \dots, z_n)^T$ — n -мерный вектор-столбец; $P(x) \in C(a, b)$ — $n \times n$ -матрица (т. е. матрица $P(x)$ определена и непрерывна в (a, b) и имеет порядок $n \times n$). Тогда существует фундаментальная матрица (интегральная матрица) $Z = Z(x)$ уравнения

$$\frac{dZ}{dx} = P(x)Z \quad (9)$$

(Z — матрица порядка $n \times n$), т. е. матрица фундаментальной системы решений однородной линейной системы (8). При этом $Z(x) \in C^1(a, b)$ — $n \times n$ -матрица (т. е. $Z(x)$ непрерывно дифференцируема на (a, b) и имеет порядок $n \times n$). Доказать, что формула $z = Z(x)c$, где c — произвольный постоянный n -мерный вектор, дает общее решение системы (8) в области $D: a < x < b, |z_h| < +\infty$ ($h = \overline{1, n}$).

1417. Пусть $Z_1(x)$ — фундаментальная матрица уравнения (9). Доказать, что формула $Z = Z_1(x)C$, где C — произвольная постоянная $n \times n$ -матрица, $D(C) \neq 0$, содержит все фундаментальные матрицы уравнения (9).

1418. Пусть поставлена задача Коши

$$\frac{dz}{dx} = P(x)z, \quad z(x_0) = z_0, \quad (10)$$

где $z = (z_1, \dots, z_n)^T$ — n -мерный вектор-столбец; $z_0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)^T$; $P(x) \in C(a, b)$ — $n \times n$ -матрица. Если $Z(x)$ — фундаментальная матрица уравнения (9), то решение задачи Коши (10) дается формулой

$$z_i = Z(x)Z^{-1}(x_0)z_0$$

(почему?) или

$$z = K(x, x_0)z_0,$$

где $K(x, x_0) = Z(x)Z^{-1}(x_0)$ (если $Z(x)$ нормирована в точке x_0 , $Z(x_0) = E$, то $z = Z(x)z_0$). Матрица $K(x, x_0)$ называется *матрицей Коши* для уравнения (9). Она представляет собою фундаментальную матрицу уравнения (9), нормированную в точке x_0 . Доказать, что матрица Коши инвариантна относительно выбора фундаментальной матрицы $Z(x)$.

1419. Дана неоднородная линейная система

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + f(x), \quad (11)$$

где $P(x) \in C(a, b)$ — $n \times n$ -матрица; $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, $f = (f_1, \dots,$

$f_n)^T \in C(a, b)$ — n -мерные векторы-столбцы (т. е. непрерывные на (a, b) векторы порядка n). Пусть $Z(x)$ — фундаментальная матрица уравнения (9). Доказать, что формула [27, с. 31; 19, с. 77]

$$y = Z(x)c + \int_{x_0}^x Z(x)Z^{-1}(t)f_1(t)dt$$

или

$$y = Z(x)c + \int_{x_0}^x K(x, t)f(t)dt,$$

где c — произвольный n -вектор, дает общее решение системы (11) в области $D: a < x < b, |y_k| < +\infty$ ($k = \overline{1, n}$). (Указание. Воспользоваться методом Лагранжа, отыскивая решение системы (11) в виде $y = Z(x)c(x)$, где $c(x) \in C^1(a, b)$ — n -вектор (т. е. $c(x)$ — непрерывно дифференцируемый в (a, b) вектор порядка n).)

1420. Пусть поставлена задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad (12)$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)^T$, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, $y_0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)^T$ — n -мерные векторы-столбцы; $P(x) \in C(a, b)$ — $n \times n$ -матрица. Доказать, что решение задачи Коши (12) может быть представлено в виде формулы Коши

$$y = Z(x)y_0 + \int_{x_0}^x Z(x)Z^{-1}(t)f(t)dt \quad (13)$$

или

$$y = Z(x)y_0 + \int_{x_0}^x K(x, t)f(t)dt,$$

где $Z(x)$ — фундаментальная матрица уравнения (9), нормированная в точке x_0 (ср. задачу 269).

1421. Какой вид принимает формула Коши (13) в случае системы с постоянными коэффициентами $\frac{dy}{dx} = Ay + f(x)$, $y(x_0) = y_0$?

1422. Пусть дано уравнение

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y, \quad (14)$$

где $P_i(x) \in C(a, b)$, Y — $n \times n$ -матрицы. Уравнение

$$\frac{dZ}{dx} = -ZP(x) \quad (15)$$

называется сопряженным по отношению к уравнению (14). Доказать, что если $Z(x)$ — фундаментальная матрица сопряженного уравнения (15), то $Y = Z^{-1}(x)$ — фундаментальная матрица данного уравнения (14).

1423. (К. А. Абгарян.) Пусть поставлена *матричная задача Коши*

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t); X(t_0) = C, \quad (16)$$

где X — $n \times n$ -матрица; $A(t), B(t) \in C(t_0, T)$ — $n \times n$ -матрицы; C — постоянная $n \times n$ -матрица. Доказать, что задача (16) имеет решение вида $X = Y(t)CZ(t)$, где $Y(t)$ и $Z(t)$ — соответственно нормированные в точке t_0 фундаментальные матрицы уравнений

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y \quad \text{и} \quad \frac{dZ}{dt} = -ZB(t).$$

1424. (К. А. Абгарян.) Доказать, что матричная задача Коши

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X - XA(t); X(t_0) = C$$

имеет решение вида $X = Y(t)CY^{-1}(t)$.

1425. (К. А. Абгарян.) Доказать, что матричная задача Коши

$$\frac{dX}{dt} = AX + XB; X(t_0) = C,$$

где A, B и C — постоянные $n \times n$ -матрицы, имеет решение вида $X = e^{A(t-t_0)} C e^{B(t-t_0)}$.

1426. (Ф. Р. Гантмахер.) Пусть поставлена *матричная задача Коши*

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y; Y(x_0) = E, x_0 \in (a, b), \quad (17)$$

где Y — $n \times n$ -матрица; $P(x) \in C(a, b)$. Будем искать решение задачи (17) методом последовательных приближений. Возьмем в качестве нулевого приближения $Y_0(x)$ единичную матрицу и зададим k -е приближение $Y_k(x)$ формулой

$$Y_k(x) = E + \int_{x_0}^x P(x) Y_{k-1}(x) dx.$$

Тогда $Y_k(x)$ будет суммой $k+1$ членов матричного ряда

$$E + \int_{x_0}^x P(x) dx + \int_{x_0}^x P(x) dx \int_{x_0}^x P(x) dx + \dots \quad (18)$$

Доказать, что матричный ряд (18) абсолютно и равномерно сходится на любом $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ и что его сумма (матрицант уравнения (17))

$$\Omega_{x_0}^x(P) = E + \int_{x_0}^x P(x) dx + \int_{x_0}^x P(x) dx \int_{x_0}^x P(x) dx + \dots$$

является решением поставленной задачи (17).

Замечание. В случае уравнения $dY/dx = AY$ ($A = \text{const}$) имеем $\Omega_{x_0}^x(A) = e^{A(x-x_0)}$ (почему?).

В задачах 1427—1431 определить тип особой точки $x = 0, y = 0$ уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

и исследовать на устойчивость нулевое решение $x \equiv 0, y \equiv 0$ соответствующей ему автономной системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Q(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= P(x, y). \end{aligned} \right\}$$

$$1427. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$1428. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x - 2x^3}{y + 2y^3}$$

$$1429. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x + y(x^2 + y^2)}{y + x(x^2 + y^2)}$$

$$1430. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x + x^2 y}{y + x^3}$$

$$1431. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x + xy^2}{y - yx^2}$$

1432. Исследовать поле скоростей, определяемое системой $\frac{dx}{dt} = y - yx^2, \frac{dy}{dt} = -x + xy^2$. Найти точки покоя (точки равновесия), определить их тип и исследовать на устойчивость соответствующие им состояния покоя.

Задачи 1433—1440 (Н. А. Сахарников) связаны с проблемой центра и фокуса для системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= -x - Y(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где $X(x, y), Y(x, y)$ — голоморфные относительно x и y функции, не содержащие свободных и линейных членов. Эта проблема, как известно, тесно связана с проблемой существования у системы (19) не зависящего от t интеграла, представляющего голоморфную в начале координат функцию переменных x и y . Связь этих проблем видна из следующей теоремы Ляпунова: *для того чтобы точка*

равновесия $x=0, y=0$ системы (19) была центром, необходимо и достаточно, чтобы существовал ряд вида

$$F(x, y) = \sum_{k=2}^{\infty} F_k(x, y),$$

где $F_k(x, y)$ — однородный полином степени k относительно x и y , формально удовлетворяющий уравнению

$$(y + X) \frac{\partial F}{\partial x} - (x + Y) \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

где X, Y те же, что и в системе (19).

1433. Доказать, что для существования голоморфного относительно x и y интеграла системы (19) необходимо и достаточно существование голоморфного интегрирующего множителя для уравнения $(x+Y)dx + (y+X)dy = 0$.

1434. Доказать, что если $xX - yY \equiv 0$, то точка равновесия $x=0, y=0$ для системы (19) является центром.

1435. Доказать, что если X и Y — однородные полиномы одной и той же степени, причем

$$xY + yX \equiv 0 \text{ и } \int_0^{2\pi} \frac{X(\cos \varphi, \sin \varphi)}{\cos \varphi} d\varphi = 0, \quad (20)$$

то точка равновесия $x=0, y=0$ для системы (19) является центром. Существуют ли другие функции x и y , удовлетворяющие условиям (20), для которых $x=0, y=0$ — центр?

1436. Доказать, что если $X(y, x) \equiv Y(x, y)$, то точка равновесия $x=0, y=0$ системы (19) — центр.

1437. Доказать, что если X и Y — однородные полиномы четной степени относительно x и y и $X(y, x) \equiv -Y(x, y)$, то точка равновесия $x=0, y=0$ системы (19) — центр.

1438. Доказать, что если $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — голоморфные относительно x и y функции, в разложениях которых по целым положительным степеням x и y отсутствуют члены нечетного измерения, и $X(y, x) \equiv -Y(x, y)$, то точка равновесия $x=0, y=0$ системы (19) — центр.

1439. Доказать, что вид (характер) точки равновесия $x=0, y=0$ системы (19) и системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + mX, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - mY, \end{aligned} \right\}$$

где X, Y — однородные полиномы степени $n \geq 2$, а m — вещественное постоянное число, не зависит от величины m .

1440. Дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X_1(x, y^2) + yX_2(x, y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= Y_1(x, y^2) + yY_2(x, y^2), \end{aligned} \right\}$$

где X_1, X_2, Y_1, Y_2 — голоморфные относительно x и y^2 функции, причем $X_1(0, 0) = Y_1(0, 0) = Y_2(0, 0) = 0$, $X_2(0, 0) \neq 0$, $Y_1(x, 0) \neq 0$. Доказать, что для того чтобы эта система допускала не зависящий от t интеграл, представляющий собой голоморфную функцию от x и y^2 (или от x и $x^2 + y^2$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $X_1 Y_1 - y^2 X_2 Y_2 \equiv 0$.

В задачах 1441—1448 (А. Ф. Андреев) выяснить тип расположения фазовых траекторий системы в окрестности точки равновесия $x=0, y=0$.

1441. $\frac{dx}{dt} = x^l, \quad \frac{dy}{dt} = ax^m + by$, где $l \geq 2, m \geq 1$ — целые числа; $a, b \neq 0$ — постоянные.

1442. $\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = ax^m + by^n$, где $m \geq 1, n \geq 2$ — целые числа; $a, b \neq 0$ — постоянные.

1443. $\frac{dx}{dt} = y + (x + y)^3, \quad \frac{dy}{dt} = -(x + y)^3.$

1444. $\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 \equiv y + Q(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= -(x^3 + 3ax^2y + 3bxy^2 + cy^3) \equiv -P(x, y), \end{aligned} \right.$

где a, b, c, d — постоянные вещественные числа.

1445. $\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + 3x^2y - y^3 \equiv y + Q(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= -x^3 + 3xy^2 \equiv P(x, y). \end{aligned} \right.$

1446. $\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + ax^3 + 2a^2x^2y - a^3xy^2 + by^3, \\ \frac{dy}{dt} &= -x^3 - 3ax^2y - a^2xy^2 + a^3y^3 \quad (a \neq 0). \end{aligned} \right.$

1447. $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = ax^\alpha + bx^\beta y$, где параметры $\alpha, \beta, a,$

b удовлетворяют условиям $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ и принимают следующие значения:

- 1) $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $a = 1$, $b = 1$; 2) $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $a = 1$, $b = 1$;
 3) $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $a = -2$, $b = 4$; 4) $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $a = -1$, $b = 1$;
 5) $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $a = -1$, $b = 1$; 6) $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $a = 1$, $b = 1$;
 7) $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $a = -1$, $b = 1$; 8) $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $a = -3$, $b = 6$.

$$1448. \quad \frac{dx}{dt} = y - x^2, \quad \frac{dy}{dt} = x^3 (y - x).$$

1449. (А. Ф. Андреев.) Для уравнения

$$r \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{2} \varphi^3 + \frac{r}{|\ln r|} \sin^3 \left(\sqrt[3]{3 |\ln r| \frac{\varphi - r}{r}} \right) + r + \frac{1}{2} r^3$$

направление $\varphi = 0$ можно заключить в нормальную область второго типа. Показать, что оно имеет в этой области бесчисленное множество O -кривых.

1450. (А. Ф. Андреев.) То же для уравнения

$$r \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{2} \varphi^3 - \varphi \left(\frac{3}{2 \ln r} + \frac{r \sin^3(\sqrt[3]{\varphi \ln r})}{\ln^2 r} \right) + r + r^2.$$

1451. (А. Ф. Андреев.) Доказать, что для системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + ax^3 + bx^2y - 3cxy^2 + dy^3, \\ \frac{dy}{dt} &= -x^3 - 3ax^2y - bxy^2 + cy^3 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

точка равновесия $x = 0$, $y = 0$ является центром.

1452. (А. Ф. Андреев.) Найти расположение фазовых траекторий системы (21) на всей плоскости (x, y) при следующих значениях параметров:

- 1) $a = -1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 1$; 2) $a = -1/2$, $b = 1/2$, $c = d = 0$;
 3) $a = -1$, $b = c = d = 0$; 4) $a = -1$, $b = c = 0$, $d = -5$;
 5) $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$, $d = -2$.

В задачах 1453, 1454, пользуясь критерием Гурвица, исследовать на асимптотическую устойчивость нулевое решение однородной линейной автономной системы.

Пусть дана однородная линейная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (22)$$

где x — n -мерный вектор; A — постоянная, вещественная $n \times n$ -матрица. Рассмотрим нулевое решение

$$x \equiv 0, \quad (23)$$

определяемое системой (22). Для того чтобы это решение было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все характеристические числа системы (22) (или, что то же, матрицы A) имели отрицательные вещественные части [8, с. 641]. Отрицательность вещественных частей характеристических чисел можно установить и не решая характеристического уравнения, пользуясь следующим критерием Гурвица [8, 14, 19, 25].

Пусть дано уравнение ($n > 1$)

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} y + a_n = 0. \quad (24)$$

Рассмотрим последовательность

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}. \quad (25)$$

Составим $n \times n$ -матрицу, k -я строка которой является отрезком последовательности (25) с элементом a_k на главной диагонали:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_3 & a_2 & a_1 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Эта матрица называется *матрицей Гурвица*.

Критерий Гурвица. Для того чтобы все корни уравнения (24) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_k > 0$ ($k = \overline{1, n}$), где Δ_k — главные диагональные миноры матрицы (26). При этом $\Delta_1 = a_1$, а Δ_n — определитель матрицы (26).

В частности, в случае уравнения второй степени

$$y^2 + a_1 y + a_2 = 0 \quad (27)$$

имеем последовательность $0, a_2, a_1, 1$, так что матрица (26) будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Поэтому критерий Гурвица для уравнения (27) сводится к требованию положительности коэффициентов a_1 и a_2 .

Полином, все корни которого имеют отрицательные вещественные части, называется *гурвицевым*. Если характеристический полином матрицы A гурвицев, то матрица A называется *гурвицевой*.

Таким образом, для того чтобы решение (23) было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была гурвицевой.

$$1453. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + ay, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$$

$$1454. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Задачи 1455—1457 посвящены исследованию на устойчивость по Ляпунову решений дифференциальных уравнений второго порядка.

Пусть дано дифференциальное уравнение второго порядка [7]

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (28)$$

описывающее движение материальной точки по оси Ox , где x и $\frac{dx}{dt}$ — положение и скорость точки в момент времени t . Предположим, что $f(t, 0, 0) \equiv 0 \quad \forall t \geq t_0$. Тогда уравнение (28) определяет решение (движение)

$$x \equiv 0 \quad (t \geq t_0). \quad (29)$$

Это решение называется *состоянием покоя*. Оно удовлетворяет нулевым начальным условиям:

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{при } t = t_0.$$

Пусть f такова, что решения

$$x = x(t, t_0, x_0, v_0) \quad (30)$$

с начальными условиями:

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{при } t = t_0,$$

где x_0 и v_0 достаточно малы, существуют, единственны и продолжимы на все $t \geq t_0$.

Решение (движение) (29) называется *невозмущенным*, а решения (движения) (30) с ненулевыми начальными значениями x_0 и v_0 — *возмущенными*.

Решение (29) называется *устойчивым в смысле Ляпунова*, если

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: |x_0| < \delta, |v_0| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |x(t, t_0, x_0, v_0)| < \varepsilon, \quad \left| \frac{dx(t, t_0, x_0, v_0)}{dt} \right| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Если хотя бы для одного $\varepsilon > 0$ не существует соответствующего $\delta > 0$, то решение (29) называется *неустойчивым*.

Решение (29) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и, кроме того, для достаточно малых x_0 и v_0

$$x(t, t_0, x_0, v_0) \rightarrow 0, \quad \frac{dx(t, t_0, x_0, v_0)}{dt} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Если решение (29) неустойчиво, но можно подчинить достаточно малые x_0 и v_0 такому дополнительному условию вида $\varphi(x_0, v_0) \geq 0$, $\varphi(0, 0) = 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется соответствующее $\delta > 0$, то решение (29) называется *условно устойчивым*.

1455. Исследовать на устойчивость нулевое решение, определяемое однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (31)$$

где p, q — вещественные числа, по характеристическим числам уравнения (31).

1456. Доказать, что для того чтобы нулевое решение $y \equiv 0$ уравнения (31) было асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы характеристический полином $\lambda^2 + p\lambda + q$ был гурвицевым: $p > 0, q > 0$.

1457. Движение материальной точки массой m по оси Ox под действием силы $(-ax)$, притягивающей ее к началу координат, и силы сопротивления среды $\left(-b \frac{dx}{dt}\right)$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + k^2x = 0, \quad (32)$$

где $h = b/(2m) > 0$; $k^2 = a/m > 0$. Пользуясь критерием Гурвица, исследовать на асимптотическую устойчивость состояние покоя $x \equiv 0$, определяемое уравнением (32). Исследовать на устойчивость состояние покоя $x \equiv 0$ в случае, когда движение происходит в среде без сопротивления ($h = 0$).

В задачах 1458—1461 исследовать на устойчивость нулевое решение автономной системы, используя систему первого приближения.

Пусть дана нелинейная автономная система

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k = \overline{1, n}), \quad (33)$$

где X_k обращается в нуль в точке $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$. Тогда система (33) определяет нулевое решение

$$x_1 \equiv 0, \dots, x_n \equiv 0. \quad (34)$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости решения (34) в предположении, что X_k голоморфны в точке $x_1=0, \dots, x_n=0$ и нелинейность системы (33) не является существенной, т. е. разложения хотя бы одной из X_k по степеням $x_1, \dots, x_n$ имеют линейные члены, так что система (33) может быть записана в виде

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l + f_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k = \overline{1, n}), \quad (35)$$

где a_{kl} — вещественные числа; f_k — голоморфные «нелинейности». Укороченная (в данном случае линейная) система

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^n a_{kl} x_l \quad (k = \overline{1, n}) \quad (36)$$

называется *системой первого приближения* по отношению к системе (35).

Если все характеристические числа системы (36) имеют отрицательные вещественные части или среди них имеется хотя бы одно с положительной вещественной частью, то об устойчивости решения (34) для системы (33), а следовательно, и для системы (35) можно судить по первому приближению (36), а именно: в этом случае решение (34) будет для системы (33) соответственно асимптотически устойчивым или неустойчивым.

$$1458. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin(x - y), \\ \frac{dy}{dt} = \sin(x + y). \end{cases}$$

$$1459. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin(x + y), \\ \frac{dy}{dt} = \sin(x - y). \end{cases}$$

$$1460. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^x - y - 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + e^y - 1. \end{cases}$$

$$1461. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin x - e^y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = \cos x + y - 1. \end{cases}$$

В задачах 1462—1464 (В. И. Зубов) требуется найти границу области асимптотической устойчивости рассматриваемого решения нелинейной автономной системы, доказав предварительно его асимптотическую устойчивость.

1462. $\frac{dx}{dt} = -x + 2x^2y, \quad \frac{dy}{dt} = -y; \quad x \equiv 0, \quad y \equiv 0$. Изучив поле направлений, исследовать качественную картину поведения траекторий в области асимптотической устойчивости, на границе этой области и вне ее.

$$1463. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{(1 - x^2 + y^2) 2x}{(x+1)^2 + y^2} + xy, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1 - x^2 + y^2}{2} - \frac{4x^2 y}{(x+1)^2 + y^2}; \end{cases} \quad x \equiv 1, y \equiv 0.$$

$$1464. \quad \frac{dx}{dt} = -x + y + x(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -x - y + y(x^2 + y^2); \quad x \equiv 0, y \equiv 0.$$

1465. (В. И. Зубов.) Доказать, что уравнение $\frac{dx}{dt} = gx^{2k+1} + q(t)$ ($k = 0, 1, \dots$), где $g < 0$ — константа, а $q(t)$ — почти периодическая функция, обладает свойством конвергенции при любом выборе функции $q(t)$.

1466. (Н. А. Лукашевич.) Доказать, что система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= e^t y + f(t)(x^2 + y^2 - 1), \\ \frac{dy}{dt} &= -e^t x + \varphi(t)(x^2 + y^2 - 1), \end{aligned} \right\}$$

где $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывны при $|t| < +\infty$, имеет решение $x=x(t)$, $y=y(t)$, которому соответствует замкнутая кривая на фазовой плоскости (x, y) , но которое не является периодическим решением.

1467. (Н. П. Еругин.) Доказать, что система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sin t + t(x^2 + y^2 - 1), \\ \frac{dy}{dt} &= \cos t + t(x^2 + y^2 - 1), \end{aligned} \right\}$$

правые части которой не являются периодическими функциями относительно t , имеет периодическое решение.

1468. (Н. П. Еругин.) Доказать, что система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (x^2 + y^2 - 1) \sin \lambda t + y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x, \end{aligned} \right\}$$

правые части которой суть периодические функции относительно t с периодом $2\pi/\lambda$, имеет периодическое решение, период которого при иррациональном λ не соизмерим с периодом правых частей системы.

1469. (Н. П. Е р у г и н.) Доказать, что линейная система двух уравнений с непрерывными ω -периодическими коэффициентами не имеет периодических решений периода, не соизмеримого с ω .

В задачах 1470—1474 (А. Ф. А н д р е е в), рассматриваются условия сохранения типа Пуанкаре расположения траекторий автономной однородной линейной системы в окрестности точки покоя при неголоморфных возмущениях правых частей (ср. задачи 1428—1431).

Рассмотрим квазилинейную автономную систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + \xi(x, y), \\ \dot{y} &= cx + dy + \eta(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

где матрица $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ невырождена ($\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$), а функции ξ и η непрерывны в области G , содержащей точку $O(0, 0)$, обеспечивая единственность траектории системы (37), проходящей через любую точку области G , и удовлетворяют условию:

$$\xi(x, y), \eta(x, y) = o(r) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0).$$

Для системы (37) точка O является точкой покоя (доказать). Справедлива следующая теорема Пуанкаре (относительно расположения траекторий системы (37) в окрестности точки O): *если ξ, η голоморфны в точке O , то траектории системы (37) в малой окрестности точки O образуют ту же конфигурацию (тот же тип Пуанкаре: седло, узел, вырожденный узел, дикритический узел или фокус), что и траектории ее линейной части, если только $\lambda_{1,2} \neq \pm i\beta, \beta \in \mathbb{R}^+$* . Доказать этот результат и даже значительно усилить его (см. задачи 1470—1474) можно, изучая уравнение

$$r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{F(\varphi) + f(r, \varphi)}{G(\varphi) + g(r, \varphi)},$$

получающееся из системы (37) путем перехода к полярным координатам r, φ и исключением t (см., например, [9, 38]).

1470. Показать, что если в системе (37) матрица A такова, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — вещественные, а ξ и η непрерывны в G или $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha\beta \neq 0$, то для нее состояние равновесия имеет тот же тип Пуанкаре (седло, узел или фокус), что и для соответствующей линейной системы.

1471. Показать, что если в системе (37) матрица A имеет кратное собственное число λ и одноклеточную жорданову форму, а

$$\xi(x, y), \eta(x, y) = o(r^{1+\varepsilon}) \quad (r \rightarrow 0, \varepsilon > 0 - \text{const}),$$

то точка O для нее имеет тот же тип Пуанкаре (вырожденный узел), что и для ее линейного приближения.

1472. Показать, что если в системе (37) матрица A имеет кратное собственное число λ и диагональную форму Жордана, а ξ и η непрерывно дифференцируемы в G , причем

$$\xi'_\lambda, \xi'_y, \eta'_x, \eta'_y = o(r^\varepsilon) \quad (r \rightarrow 0, \varepsilon > 0 - \text{const}),$$

то для нее точка O имеет тот же тип Пуанкаре (дискритический узел), что и для ее линейного приближения.

Следующие примеры Перрона (задачи 1473, 1474) показывают, что достаточные условия сохранения для точки покоя O системы (37) типа Пуанкаре в случаях кратных собственных чисел матрицы A , указанных в задачах 1471, 1472, «почти необходимы».

1473. Выяснить поведение траекторий системы уравнений $\dot{x} = -x + y - y/\ln r$, $\dot{y} = -y + x/\ln r$ в окрестности точки $O(0, 0)$. Какое из условий задачи 1471 здесь нарушено?

1474. То же для системы $\dot{x} = -x - y/\ln r$, $\dot{y} = -y + x/\ln r$. Какое из условий задачи 1472 здесь нарушено?

В задачах 1475—1489 рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения с отклоняющим аргументом.

1475. Решить задачу Коши $\dot{x}(t) = x(t - t^2) + 2x(t)$; $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

1476. Найти методом шагов [39, с. 17] решение задачи Коши: $x(t) = x(t - 1)$; $x(t) \equiv 1$, $0 \leq t \leq 1$.

1477. Доказать, что уравнение $y'(x) + p(x)y'(x - 1) + q(x)y(x) + r(x)y(x - 1) = 0$ в случае $r(x) - p(x)q(x) - p'(x) = 0$ приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению подстановкой $y(x) + p(x)y(x - 1) = z(x)$.

1478. Для уравнения $y'(x) + ay(x) + by(x - h) = 0$ ($h > 0$) функция $P(\lambda) = \lambda + a + be^{-\lambda h}$ называется *характеристическим квазиполиномом*, а уравнение $P(\lambda) = 0$ — *характеристическим уравнением* [29, с. 64]. Доказать, что характеристическое уравнение может иметь корни не выше второй кратности. Найти корень второй кратности, если $b > 0$.

1479. Всякому корню первой кратности характеристического уравнения для уравнения задачи 1478 отвечает решение $y(x) = Ce^{\lambda x}$ этого уравнения. Выписать решения, соответствующие кратному корню.

1480. Доказать, что если в уравнении задачи 1478 параметры a и b удовлетворяют условию $-a + |b| < 0$, то все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части.

1481. При каких a , b и h будут существовать периодические решения уравнения $y'(x) + ay(x) + by(x - h) = 0$? Найти их.

1482. Показать, что при любом сколь угодно малом $\tau > 0$ нулевое решение уравнения $\ddot{x}(t) + k^2x(t - \tau) = 0$ неустойчиво.

В задачах 1483—1486, используя теорему об асимптотической устойчивости по первому приближению [29, с. 149], определить ха-

рактер устойчивости нулевого решения уравнения (см. также задачу 1480).

$$1483. \dot{x}(t) + x(t) = \sin^2(x(t) + x(t-1)).$$

$$1484. \dot{x}(t) + 2x(t) - x(t-2) = 0.$$

$$1485. \dot{x}(t) - x(t) + 2x(t-1) = 0.$$

$$1486. \dot{x}(t) + 10x(t) - 5x(t-1) = \operatorname{tg}^2 x(t) + 4 \sin x(t-1).$$

1487. (Р. Беллман и К. Кук.) Показать, что нулевое решение уравнения $\dot{x}(t) + x(t + \delta) = 0$ неустойчиво при любом $\delta > 0$ в классе решений, определенных при $t \geq 0$.

1488. (В. Р. Петухов.) Показать, что при каждом x_0 ($0 < x_0 < 1$) уравнение $\dot{x}(t) + x(t - x(t)) = 0$ с начальными условиями: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = x_0$ имеет периодическое решение.

1489. Доказать, что для уравнения $\dot{x}(t) = -b(t)(x(t) - x(t-1))$, где $b(t) > 0$, ограничена при $t \geq 0$ и интегрируема на любом конечном интервале, все решения — либо константы, либо стремятся к последним при $t \rightarrow +\infty$.

В задачах 1490, 1491 (О. А. Жаутыков) рассматриваются бесконечные системы дифференциальных уравнений.

1490. Найти решения однородного линейного уравнения с частными производными первого порядка счетного числа независимых переменных

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k+1} \frac{\partial z}{\partial x_k} = 0.$$

1491. Пусть дана бесконечная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = -x_k + x_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (38)$$

правые части которой непрерывны при любых значениях переменных $x_1, x_2, \dots$, равномерно ограничены в области H : $0 \leq t \leq T$, $|x_k| \leq R$ ($k = 1, 2, \dots$), где $R > 0$ — любое конечное число, и удовлетворяют условию Липшица. Показать, что система уравнений (38) имеет бесконечное множество решений, проходящих через заданную точку $(0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots) \in H$, причем $|x_k^{(0)}| \leq r < R$ ($k = 1, 2, \dots$), которое не является равномерно ограниченным.

В задачах 1492 — 1495 (О. А. Жаутыков) найти приближенное периодическое решение методом малого параметра.

Пусть дано нелинейное уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a^2 x = f(t) + \mu F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \mu\right), \quad (39)$$

где μ — малый параметр. Линейное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a^2x = f(t), \quad (40)$$

получающееся из уравнения (39) при $\mu=0$, называется *порождающим* уравнением для нелинейного уравнения (39).

Предположим, что $f(t)$ непрерывна, 2π -периодична и порождающее уравнение (40) имеет единственное 2π -периодическое решение $x=x_0(t)$. Тогда при определенных условиях на функцию F , устанавливаемых теоремой Пуанкаре, уравнение (39) имеет единственное 2π -периодическое решение, стремящееся к указанному выше 2π -периодическому решению порождающего уравнения (40) при $\mu \rightarrow 0$. Это решение может быть найдено в виде ряда по степеням параметра μ (*метод малого параметра*)

$$x(t, \mu) = x_0(t) + x_1(t)\mu + \dots + x_n(t)\mu^n + \dots, \quad (41)$$

сходящегося при достаточно малых $|\mu|$, причем все коэффициенты ряда (41) суть 2π -периодические функции от t .

1492. Для уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 2x = \sin t + x^2\mu$ найти приближенное периодическое решение вида $x(t, \mu) = x_0(t) + x_1(t)\mu$.

1493. Применив метод малого параметра, построить второе приближение 2π -периодического решения уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = p \sin t + \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt}$, где $\omega \neq 1$; p — постоянные числа; μ — малый параметр, к которому приводит исследование простого регенеративного приемника с колебательным контуром в цепи при действии периодической возмущающей силы.

1494. Построить методом малого параметра второе приближение $2\pi/m$ -периодического решения уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2x = p \cos mt - \mu\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$, где $\lambda \neq m$; p, m — постоянные; μ — малый параметр, встречающийся в теории приливов.

1495. Для уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x-\lambda}{(1-\lambda x)^3} = 0$, где $0 < \lambda < 1$; $-1 \leq x < 1$, найти решение, удовлетворяющее начальным условиям: $x(0) = 1, x'(0) = 0$, в виде ряда по степеням параметра λ . Выделить свободный член и коэффициенты при λ и λ^2 .

1496. (Б. Н. Скачков.) Дана система

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (2 - x^2 - y^2)x^m - ay^n, \\ \frac{dy}{dt} &= ax^m + (2 - x^2 - y^2)y^n, \end{aligned} \right\}$$

где m, n — целые нечетные положительные числа; $0 < a < 1$. Доказать, что эта система имеет периодическое решение.

1497. Доказать, что нормированная в точке $x = 0$ интегральная матрица уравнения $dY/dx = P(x)Y$, где $P(x)$ — непрерывная ω -периодическая матрица, может быть представлена в виде $Y(x) = F(x)e^{-Kx}$ (формула Флоке — Ляпунова), где $F(x)$ — непрерывная ω -периодическая матрица; $K = (1/\omega)Y(\omega)$; $Y(\omega)$ — матрица монодромии [30, с. 82].

1498. Пусть дано уравнение

$$y' - y = -1/x \quad (x > 0) \quad (42)$$

и поставлено начальное условие

$$y(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty. \quad (43)$$

Задача Коши (42), (43) имеет единственное решение, которое может быть представлено в виде

$$y = \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t} dt \quad (44)$$

(см. задачу 289). Показать, что задача Коши (42), (43) допускает формальное решение в виде ряда по степеням $1/x$

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + \dots, \quad (45)$$

и исследовать этот ряд на сходимость. (Указание. Находить искомое решение в виде ряда

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots, \quad (46)$$

определяя свободный член a_0 из начального условия (43), а коэффициенты a_k ($k = 1, 2, \dots$) — подстановкой ряда (46) в (42). При исследовании ряда (44) на сходимость воспользоваться признаком Д'Аламбера.)

1499. Пусть дана функция $f(x)$, имеющая конечное предельное значение при $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_0. \quad (47)$$

Тогда для функции $f(x)$ имеем следующее очевидное асимптотическое представление при $x \rightarrow +\infty$:

$$f(x) = a_0 + o(1) \text{ при } x \rightarrow +\infty,$$

где $o(\varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 0$, так что $o(1)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$.

Предположим, что наряду с пределом (47) существует конечный предел отношения разности $f(x) - a_0$ к $1/x$, когда $x \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - a_0}{1/x} = a_1.$$

Тогда получим более точное асимптотическое представление $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$: $f(x) = a_0 + a_1/x + o(1/x)$, где $a_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(f(x) - a_0)$.

Продолжая этот процесс, в предположении, что существуют соответствующие пределы, получаем асимптотическое представление $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$:

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + o\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right), \quad (48)$$

где

$$a_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x);$$

$$a_k = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k \left(f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \dots - \frac{a_{k-1}}{x^{k-1}} \right) \quad (k = \overline{1, n-1}).$$

Если асимптотическое представление (48) имеет место для любого фиксированного n , то мы приходим к бесконечному ряду вида

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \dots, \quad (49)$$

который называется асимптотическим разложением функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Говорят также, что ряд (49) асимптотически сходится к функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Обозначив через $s_n(x)$ частичную сумму n членов ряда (49) и через $r_n(x)$ его остаток после n -го члена, получим:

$$f(x) = s_n(x) + o\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right), \quad x \rightarrow +\infty \quad \forall n$$

или

$$r_n(x) = o\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right), \quad x \rightarrow +\infty \quad \forall n. \quad (50)$$

Доказать, что ряд (45) дает асимптотическое разложение решения (44) при $x \rightarrow +\infty$. (У к а з а н и е. Проинтегрировать формулу (44) по частям n раз и оценить член, содержащий интеграл, показав, что он удовлетворяет условию вида (50).)

В задачах 1500—1508 (В. Ф. З а й ц е в) используются методы дискретно-группового анализа, позволяющие находить симметрию классов обыкновенных дифференциальных уравнений и устанавливать интегрируемость их частных случаев в конечном виде.

Пусть задан класс обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D(x, y, y', \dots, y^{(k)}, \vec{a}) = 0,$$

где $\vec{a}$ — вектор существенных параметров, и набор преобразований $F_i (i = \overline{1, l})$, переводящих этот класс в себя с изменением вектора существенных параметров:

$$D(\vec{a}) \xrightarrow{F_i} D(\vec{b}_i).$$

Тогда говорят, что на классе D определена дискретная группа преобразований G с l образующими, и изучение ряда свойств исходного обыкновенного дифференциального уравнения сводится к исследованию алгебраической системы $\vec{b}_i = F_i(\vec{a})$.

Наиболее просто поддаются анализу конечная симметрия класса обыкновенных дифференциальных уравнений и интегрируемость частных случаев класса в квадратурах или известных специальных функциях.

Построение дискретной группы преобразований (ДГП) в классе точечных преобразований Q проводится прямым методом — подстановкой $y = f(t, u)$, $x = g(t, u)$ с последующим наложением условий сохранения класса уравнений. Если исследуемое уравнение имеет порядок выше первого, то расщепление получившегося уравнения в частных производных по производным низшего порядка, от которых функции t и g не зависят, приводит к переопределенной системе уравнений в частных производных относительно функций f и g . Порядок ДГП $k = n + 1$, где n — число существенно разных нетривиальных решений системы.

В классе нелокальных преобразований Q^+ прямой метод неприменим, так как функции f и g зависят от низших производных, и расщепления не происходит. Поэтому для поиска ДГП в классе Q^+ используется метод опорного уравнения — редукция исследуемого уравнения к некоторому промежуточному двумя существенно различными способами (преобразования A и B).

Пусть $AD(\vec{a}) = D_1(\vec{a})$ и $BD(\vec{b}) = D_1(\vec{\beta}(\vec{b}))$, тогда получаем преобразование $D(\vec{b}) = B^{-1} \circ AD(\vec{a})$, если $\vec{a} = \vec{\beta}(\vec{b})$. Число разных нетривиальных решений этой системы совпадает с числом образующих ДГП. Как правило, в одно из преобразований (A или B) входит RF -пара, т. е. последовательное повышение и понижение порядка исходного уравнения, такое, что $RF \neq E$, где E — тождественное преобразование.

Если исходное уравнение можно разрешить относительно независимой переменной x (или искомой функции y), то применима универсальная RF -пара — почленное дифференцирование разрешенного уравнения по x и понижение порядка $y' = u$, $y'' = uu'$, ... (или соответственно $y' = u$, $y'' = u'$, ...). Остальные преобразования, входящие в A и B , являются, как правило, каноническими для дан-

ного типа уравнений (приведение обобщенно-однородного уравнения к автономному виду и т. п.).

Если при наложении некоторого условия $h(\vec{a})=0$ на вектор существенных параметров увеличивается число решений системы уравнений в частных производных или, что то же, число решений алгебраической системы, то ДГП расширяется. Это расширение записывается в виде диаграммы $G \xrightarrow{h=0} G_1$.

Исходя из имеющегося набора тривиально разрешимых уравнений данного класса, путем применения найденной ДГП можно описать все уравнения этого класса, интегрируемые в квадратурах или через известные специальные функции.

1500. (З. Н. Хакимова). Доказать, что ДГП класса уравнений $y' = Ax^n y^m$ содержит в качестве подгруппы циклическую группу C_4 . (Указание. Использовать универсальную RF-пару.)

1501. Доказать, что для класса уравнений $y'' = Ax^n y^m y^l$ диаграмма расширений

$$C_2 \xrightarrow[l=3]{l=0} D \xrightarrow[n=2]{m=2} C_2 \times D_2$$

максимальна в классе Q .

1502. Проинтегрировать уравнение $y'' = Ax^2 y^{-15/7} y'^3$.

1503. Доказать, что класс уравнений $y'' = Ax^n y^m y'^l$ допускает в классе Q^+ ДГП D_3 (группу диэдра с образующими, удовлетворяющими соотношению $g^3 = r^2 = [gr]^2 = E$). (Указание. Использовать универсальную RF-пару.)

1504. Доказать, что уравнение $y'' = Ax^{-7/6} y^{-1/2}$ может быть проинтегрировано в квадратурах. (Указание. Построить расширение $D_3 \xrightarrow[l=0]{l=0} D_6 \xrightarrow[m=-1/2]{m=-1/2} \dots$)

В задачах 1505, 1506 проинтегрировать уравнение Абеля. (Использовать преобразование A задачи 1503.)

1505. $yy' - y = 1/x$. **1506.** $yy' - y = x^4 - (10/49)x$.

1507. Используя инвариантность уравнения $y'' = Ax^{-(m+3)/2} y^m$ относительно преобразования $y = aY/X$, $x = a^2/X$, доказать его интегрируемость в квадратурах. (Указание. Сначала доказать, что любое уравнение первого порядка, инвариантное относительно преобразования независимой переменной, является уравнением с разделяющимися переменными.)

1508. Доказать, что уравнение Абеля $yy' - y = x^{5/3} - (63/100)x$ разрешимо в квадратурах.

1509. Показать, что краевая задача $L(y) \equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$; $y(a) = A$, $y(b) = B$ приводится к двум задачам Коши: 1) $L(z) = f(x)$; $z(a) = A$, $z'(a) = 0$; 2) $L(v) = 0$; $v(a) = 0$, $v'(a) = 1$. Доказать, что в этом случае решением краевой задачи будет

$$y(x) = z(x) + \frac{B - z(b)}{v(b)} v(x).$$

В задачах 1510—1512 с помощью микрокалькулятора решить поставленную задачу Коши усовершенствованным методом Эйлера—Коши или методом Рунге—Кутта четвертого порядка.

Класс дифференциальных уравнений, для которых может быть найдено точное решение, весьма ограничен. Кроме того, такое решение часто получается в виде столь сложного выражения, что вычислить по нему значения искомой функции гораздо труднее, чем проинтегрировать уравнение в численной форме. Пусть, например, требуется найти решение задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. При численном решении задача ставится так: в точках $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ (с шагом $h = x_{n+1} - x_n$) найти приближенные значения y_n ($n = 1, 2, \dots$) для точного решения $y(x_n)$. Полагаем, что $h > 0$, т. е. решение ищется справа от точки $x = x_0$.

При одношаговых (одноступенчатых) методах используется только информация о самой кривой в одной точке, т. е. чтобы найти значение y_{n+1} , необходимо знать (x_n, y_n) . Наиболее удобными методами этого класса являются *методы Рунге—Кутта*, так как они требуют вычисления не производных от функции $f(x, y)$, а значений самой функции.

Рассмотрим сначала *усовершенствованный метод Эйлера—Коши*, который является одним из методов Рунге—Кутта второго порядка. На первом шаге по известной точке (x_0, y_0) определяется величина $y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0)$, а решение y_1 искомого уравнения вычисляется по формуле

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}h(f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_1^*)).$$

Следовательно, соотношение

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)), \quad (51)$$

где

$$y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n), \quad (52)$$

описывает усовершенствованный метод Эйлера—Коши.

Приведем описание алгоритма вычислений по формулам (51) и (52) с указанием последовательности выполнения операций.

1. Ввести исходные данные, разместив их в соответствующих ячейках памяти: $h \rightarrow \text{П0}$; $x_0 \rightarrow \text{П1}$; $y_0 \rightarrow \text{П2}$ и ПЗ.
 2. Вычислить $f(x_0, y_0)$, используя подпрограмму вычисления $f(x, y)$ и вызвав x_0 из регистра памяти П1, а y_0 — из регистра ПЗ. Найденное значение отправить в регистр памяти ПА.
 3. Вычислить y_1^* по формуле (52) и отправить найденное значение в ячейку памяти ПЗ.
 4. Изменить содержимое ячейки П1, записав туда $x_1 = x_0 + h$.
 5. Вычислить y_1 по формуле (51), используя подпрограмму для определения $f(x_1, y_1^*)$ и содержимое регистров ПА, П1 и ПЗ. Полученное значение y_1 отправить в регистры памяти П2 и ПЗ.
- Выполнив все пункты, найдем первую точку (x_1, y_1) и подготовим все данные для отыскания следующей точки (x_2, y_2) .

По приведенному алгоритму составлена программа 1 для программируемого микрокалькулятора «Электроника БЗ-34». Программа записана в виде таблицы, состоящей из 11 столбцов и 4 строк. Левый столбец цифр — число десятков адреса команды. Первая верхняя строка — число единиц. Текст программы занимает оставшуюся часть таблицы и вводится в микрокалькулятор построчно нажатием клавиш, указанных в тексте программы. Вместо многоточия следует ввести подпрограмму для вычисления значения функции $f(x, y)$. Программа снабжена инструкцией, где указаны: а) регистры памяти, в которые вводятся исходные данные и порядок их ввода; б) регистры памяти, где хранится результат вычислений. Запись «а=ПВ» означает: «число а находится в регистре памяти ПВ». Запись «а; ПЗ» означает: «число а набрать на клавиатуре микрокалькулятора и нажать клавиши П и З».

Программа 1. Решение дифференциального уравнения усовершенствованным методом Эйлера — Коши

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	ПП	27	ПА	ИПО	×	ИПЗ	+	ПЗ	ИПО	ИП1
1	+	П1	ПП	27	ИПА	+	ИПО	×	2	÷
2	ИП2	+	П2	ПЗ	С/О	БП	00	...	В/О	

Инструкция: $\hat{h}$; П0; $\hat{x}_0$; П1; $\hat{y}_0$; П2; ПЗ; В/О; С/П $\Rightarrow x_1 = П1$; $y_1 = П2 = X$; С/П $\Rightarrow x_2 = П1$; $y_2 = П2 = X$; ... ; С/П $\Rightarrow x_n = П1$; $y_n = П2 = X$.

Ту же задачу можно решить методом Рунге—Кутта четвертого порядка, который обеспечивает большую точность и является одним из самых распространенных методов интегрирования дифференциальных уравнений. Он описывается системой следующих соотношений:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (53)$$

где

$$k_1 = hf(x_n, y_n); \quad (54)$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1); \quad (55)$$

$$k_3 = hf(x_n + h, y_n + k_2); \quad (56)$$

$$k_4 = hf(x_n + 2h, y_n + 2k_3). \quad (57)$$

Из формул (53)—(57) видно, что функцию следует вычислять четыре раза при различных значениях аргументов (поэтому подпрограммы в программе 2 начинаются с различных адресов).

Как и ранее, приведем описание алгоритма отыскания первого значения искомого решения по формулам (53)—(57) с указанием последовательности выполнения операций.

1. Ввести исходные данные, разместив их в соответствующих ячейках памяти: $(h/2) \rightarrow П0$; $x_0 \rightarrow П1$; $y_0 \rightarrow П2$; ПЗ.

2. Вычислить k_1 по формуле (54), используя подпрограмму и вызвав аргумент x_0 из регистра П1, а y_0 — из регистра ПЗ. Значение k_1 отправить в регистры ПА и ПВ.

3. Вычислить k_2 по формуле (55), используя подпрограмму и определив сначала x_1 и $y_0 + k_1$. Так как для дальнейших вычислений величина k_1 не потребуется, то регистр ПА можно занять для запоминания величины k_2 . Одновременно в регистре ПВ следует начинать вычисление второго слагаемого величины y_1 по формуле (53).

4. Вычислить k_3 и k_4 , используя подпрограммы, по формулам (56) и (57). Найденные значения следует отыскивать поочередно и запоминать их в регистре ПА. После вычисления k_4 в регистре ПВ уже будет находиться выражение в скобках из формулы (53).

5. Вычислить y_1 по формуле (53), используя содержимое регистров П2 и ПВ. Результат вычислений отправить в регистры памяти П2 и П3.

После выполнения всех пунктов будет найдена точка (x_1, y_1) и подготовлены исходные данные для стыкания следующей точки (x_2, y_2) . По приведенному алгоритму составлена программа 2.

Программа 2. Решение дифференциального уравнения методом Рунге—Кутты

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	ПП	37	ПВ	ПП	29	+	ИПВ	+	ПВ	ПП
1	33	+	ПА	ИПВ	+	ПВ	ПП	29	ИПВ	+
2	3	÷	ИП2	+	П2	П3	С/П	БП	00	ИП1
3	ИП0	+	П1	ИП2	ИПА	+	П3	...	ИП0	×
4	ПА	↑	В/0							

Инструкция: $(\hat{h}/2)$; П0 ; $\hat{x}_0$; П1 ; $\hat{y}_0$; П2 ; П3 ; В/0 ; $\text{С/П} \Rightarrow x_1 = \text{П1}$; $y_1 = \text{П2} = X$; ... ; $\text{С/П} \Rightarrow x_n = \text{П1}$; $y_n = \text{П2} = X$.

После набора программы 1, ввода исходных данных в ячейки памяти согласно инструкции и нажатия клавиш В/0 и С/П через 11 с в регистре П2 и на табло индицируется ответ y_1 . Снова нажимаем клавишу С/П и получаем новое значение y_2 и т. д. Время вычислений по программе 2 в три раза больше, чем по программе 1, но и точность вычислений больше.

Результаты вычислений по программам 1 и 2 записываются в табл. 1.

Таблица 1

№ п/п	x_n	$y_{\text{Э-К}}$	$y_{\text{Р-К}}$	$y_{\text{ист}}$

В табл. 1 введены следующие обозначения: $y_{\text{Э-К}}$ — приближенное значение, полученное по программе 1; $y_{\text{Р-К}}$ — приближенное значение, полученное по программе 2; $y_{\text{ист}}$ — точное значение.

В задачах 1510—1512 составить таблицу приближенных значений решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным данным $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[a, b]$; шаг $h = 0,1$ (по образцу табл. 1).

$$1510. y' = x + \sin \frac{y}{2,25}; y(1,4) = 2,2, x \in [1,4; 2,4].$$

$$1511. y' = 1 + 0,2y \sin x - 1,5y^2; y(0) = 0, x \in [0; 1].$$

$$1512. y' = 1,6x + 0,5y^2; y(0) = 0,3, x \in [0; 1].$$

В задачах 1513—1515 исследовать на устойчивость нулевое решение системы вторым методом Ляпунова [19].

$$1513. \frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x. \quad 1514. \frac{dx}{dt} = -x, \frac{dy}{dt} = -y.$$

$$1515. \frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = y. \text{ (Указание. Воспользоваться теоремой}$$

Ляпунова о неустойчивости [19].)

ОТВЕТЫ

В ответах к задачам на интегрирование уравнений указываются только общее решение (в той или иной форме) и особые решения.

В ответах на задачи Коши приводятся только частное и особое решения. Возможные гладкие комбинации решений не указываются.

Для задач, приводящихся к дифференциальным уравнениям, указываются дифференциальное уравнение задачи и искомое решение.

Проверяя правильность найденных общего и особого решений или решения задачи Коши, нужно сравнить полученный ответ с результатом предварительного аналитического и качественного исследования дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений). Последнее включает определение типа уравнения (системы уравнений), его области задания, области существования решения задачи Коши, области существования и единственности решения задачи Коши, нахождение особых точек уравнения (точек равновесия системы уравнений), выяснение возможности наличия особых решений, изучение поля направлений (поля скоростей), определяемых данным уравнением (системой уравнений), выяснение возможной аналитической структуры и поведения решений (траекторий) в окрестности точек (точек равновесия) и во всей области задания уравнения (системы уравнений).

Проверяя правильность выполненных рисунков, необходимо контролировать расположение интегральных кривых (траекторий) результатами предварительного исследования уравнения (системы уравнений).

Правильность указанного в ответе общего решения (общего интеграла) можно проверить подстановкой его в данное уравнение. Если это требует трудоемких вычислений, то полезно сделать хотя бы частичную проверку ответа, подставляя в данное уравнение решение, соответствующее какому-нибудь конкретному (допустимому) числовому значению произвольной постоянной C .

Проверяя особое решение, нужно убедиться, что указанная в ответе функция является решением данного уравнения и в каждой точке (x_0, y_0) этого решения нарушена единственность решения задачи Коши, для чего достаточно найти все решения с начальными данными x_0, y_0 , используя при этом все семейство найденных решений уравнения. Чтобы проверить, все ли особые решения указаны в ответе, нужно найти и испытать все кривые, подозрительные на особое решение.

Если в ответе приведено только общее решение, надо обосновать отсутствие особых решений.

Во избежание потери решений нужно внимательно следить за равносильностью переходов, выполняемых в процессе интегрирования дифференциального уравнения.

Чтобы проверить ответ на задачу Коши, следует убедиться, что указанная в ответе функция (или каждая из функций, если их несколько) является решением данного уравнения, удовлетворяет поставленным начальным условиям и что других решений нет. При этом всегда надо, исходя из аналитической структуры дифференциального уравнения и опираясь на теорему существования и единственности, отчетливо уяснить себе, имеет место единственность решения задачи Коши или нет. В частности, не имеем ли мы дело со случаем, когда условия теоремы Пикара заведомо выполнены, так что единственность гарантирована.

Решив задачу Коши, нужно изучить свойства полученного решения, просле-

дить их связь со свойствами самого дифференциального уравнения и начальных данных, сравнить интервал задания решения с интервалом, обеспеченным теоремой существования и единственности, и проанализировать поведение решения задачи Коши в окрестности особой точки уравнения и на бесконечности.

Для проверки правильности найденного общего и особых решений или решения задачи Коши простейших дифференциальных уравнений полезно использовать известную аналитическую структуру общего решения и возможный аналитический вид особых решений, а также известный характер поведения решений. Так, общее решение линейного уравнения любого порядка является линейной функцией от произвольных постоянных. Если все коэффициенты линейного уравнения непрерывны, то оно не имеет особых решений. Всякое решение линейного уравнения определено во всем интервале непрерывности коэффициентов, содержащем начальное значение независимой переменной, и может обращаться в бесконечность только в точке разрыва хотя бы одного из коэффициентов этого уравнения. Если коэффициенты линейного уравнения голоморфны в точке x_0 , то радиус сходимости степенного ряда, представляющего любое решение, голоморфное в точке x_0 , не меньше, чем наименьший из радиусов сходимости степенных рядов, представляющих коэффициенты самого уравнения в окрестности этой точки.

Глава I

1. $y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$. 2. $y = \ln(x^2 + 1) + C$. 3. $y = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$. 4. $y = 2 \left(\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x} + 1) \right) + C$. 5. $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$.
6. $y = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C$. 7. $y = \ln(\sqrt{1+x^2} + 1) + C$. 8. $y = x \sin x + \cos x + C$. 9. $y = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$. 10. $y = e^x (\cos x + \sin x) + C$.
11. $y = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} \right) + C$. 12. $y = -\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$.
13. $y = \operatorname{ch} x + C$. 14. $y = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$. 15. $y = \arcsin(x/2) + C, x = \pm 2$.
16. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C, x = \pm 1$. 17. $y = \ln|\sin x| + C$. 18. $y = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$.
19. $y = \int \frac{x}{\ln x} dx + C$. 20. $y = \int \frac{e^x}{x} dx + C$. 21. $y = \int \frac{1}{\ln x} dx + C$. 22. $y = \ln|1 + 2x + 2\sqrt{x+x^2}| + C, x = 0, x = -1$. 23. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} + C, x = \pm 1$.
24. $y = x \ln x + C, x = 0$. 25. $y = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right] + C$. 26. $y = \ln \frac{x^2+1}{|x+1|} + C$. 27. $y = \frac{x}{a^2 - x^2} + C$.
28. $y = \operatorname{sign} x \frac{x^2}{2} + C$. 29. $y = \int \frac{\cos x}{x} dx + C$. 30. $y = -e^{-x^2} + C; y = -e^{-x^2}$ (рис. 54).
31. $y = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C; y = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$. 32. $y = 1/x + C; y = 1/x$ ($0 < x < +\infty$); $y = 1/x$ ($-\infty < x < 0$), $x = 0$. 33. $y = \sqrt{x-1} + C, x = 1; y = \sqrt{x-1} + 1, x = 1$ (рис. 55).
34. $y = -\sqrt{1-x^2} + C, x = \pm 1; y = -\sqrt{1-x^2}; y = -\sqrt{1-x^2} + 2, y = -\sqrt{1-x^2}, x = 1$. 35. $y = \int_0^x e^{-x^2} dx + C;$

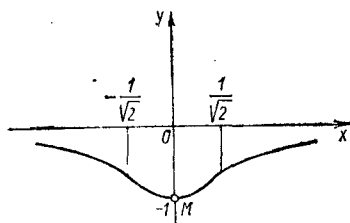


Рис. 54

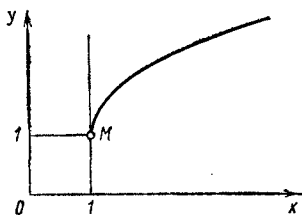


Рис. 55

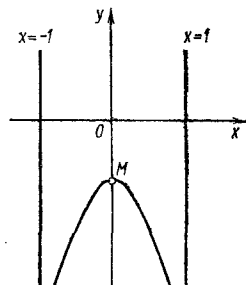


Рис. 56

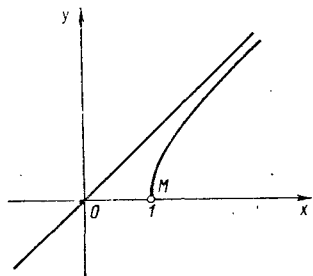


Рис. 57

- $y = \int_0^x e^{-x^2} dx$. 36. $x = \frac{\pi}{2} (2k+1)$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 37. $x = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 38. $x = 1$. 39. Нет. 40. $x = 1$. 41. $x = \pm \sqrt[3]{2}$. 42. $y = 0$.
 43. $y = \pm \pi/2$. 44. $x = \pm 1$ (рис. 56), $y = 1/(x^2 - 1)$ ($|x| < 1$). 45. $y = x$ (рис. 57),
 $y = \sqrt{x^2 - 1}$. 46. $y = \pm \sqrt{\pi}/2$. 47. $x = \pm \pi/2$. 56. Область задания, существования и единственности решения задачи Коши — вся плоскость (x, y) ; $x = a$ —
 изоклины; все решения возрастают (во всем интервале задания решения, $x = 0$ —
 линия точек перегиба (рис. 58)). 62. $y' = x^2$. 63. $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 64. $y = \frac{1}{x}$.
 65. $y' = \frac{2kx}{k^2x^2 - 1}$; $y = \frac{1}{k} \ln |k^2x^2 - 1| + C$. 66. $y' = k/x$; $y = k \ln |x| + C$.
 67. $ds/dt = v_0$; $s = v_0(t - t_0) + s_0$. 68. $\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g} x$; $y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C$. 69. $e^{-y} =$
 $-x + C$. 70. $2y = x \ln 2 + C$. 71. $-\frac{2+3y^2}{2y(1+y^2)} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} y = x + C$.
 72. $y = Ce^x - 1$. 73. $\operatorname{tg} y = x + C$. 74. $\operatorname{tg} (y/2) = Ce^x$. 75. $\operatorname{ctg} (\pi/4 - y/2) = Ce^x$.
 76. $y^{-n+1} = k(-n+1)x + C$ при $n \neq 1$; $y = 0$ при $0 < n < 1$ — особое решение;
 $y = Ce^{kx}$ при $n = 1$. 77. $\frac{1}{6} \ln \frac{(y+1)^2}{y^2 - y + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y-1}{\sqrt{3}} = x + C$.
 78. $\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{a}} = x + C$ при $a > 0$, $\frac{y - \sqrt{-a}}{y + \sqrt{-a}} = Ce^{2\sqrt{-a}x}$ при $a < 0$,
 $y = -\frac{1}{x+C}$ при $a = 0$. 79. $y - \operatorname{arctg} y = x + C$. 80. $y - \ln |y+1| = x + C$.

81. $\cos y = Ce^{-x}$. 82. $\ln y = Ce^x$. 83. $\int \frac{dy}{\ln y} = x + C$. 84. $y^{-1/2} = \frac{1}{2}x + C$.
 85. $y = (x + C)^2$, $x \geq -C$ при $y \geq 0$; $y = -(x^2 + C)^2$, $x \leq -C$ при $y \leq 0$; $y = 0$.
 86. $\ln |x + y + 2| = x + C$. 87. $\operatorname{arctg}(x + y) = x + C$. 88. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4x + y - 1}{2} = x + C$.

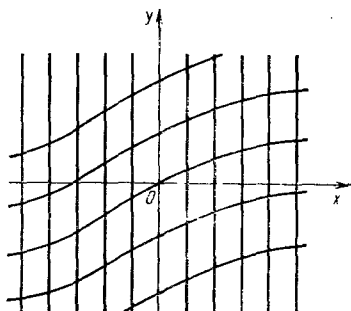


Рис. 58

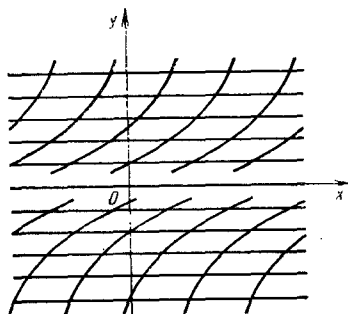


Рис. 59

89. $e^{-(x+y)} = -x + C$. 90. $\ln |x + y| - y = C$. 91. $y = -x + \frac{Ce^{-2x} + 1}{1 - Ce^{-2x}}$;
 $x \neq \frac{\ln C}{2}$ при $C > 0$; $y = -x + 1$, $y = -x - 1$. 92. $\sqrt{y-x} + \ln |\sqrt{y-x} - 1| =$
 $= \frac{1}{2}x + C$. 93. $y = x + (x + C)^2/4$, $x \geq -C$; $y = x$. 94. $y = x^2 - (x - C)^2/4$,
 $x \leq C$; $y = x^2$. 95. $\operatorname{arctg} y + C = \frac{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+y^2} + y - x}{1 + xy}$. 96. $\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{p}{q}r$,
 $r = C \exp\left(-\frac{p}{q}\varphi\right)$, $\sqrt{x^2 + y^2} = C \exp\left(-\frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)$. 97. $y = Ce^x$; $y = e^x$.
 98. $y = Ce^{-x}$; $y = e^{-x}$. 99. $y = 1/(x + C)$; $y = 0$, $y = 1/x$ ($x > 0$). 100. $y = 1 +$
 $+ Ce^x$; $y = 1$. 101. $y^2 = 2x + C$; $y^2 = 2x$. 102. $y = (x + C)^2$ ($x \geq -C$), $y = 0$;
 $y = (x + 2)^2$ ($x \geq -2$); $y = x^2$ ($x \geq 0$), $y = 0$. 103. $y = (x + C)^3$, $y = 0$; $y =$
 $= (x + 1)^3$; $y = x^3$, $y = 0$. 104. $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x$. 105. $y = \pm 1$. 106. $y = 2$, $y = 3$.
 107. $y = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$). 108. Нет. 109. $y = 0$. 110. $y = 0$, $y = 1$. 111. $y =$
 $= (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \dots$). 112. Нет. 113. $x = \pm \pi/2$. 114. $x = -1$,
 $y = 0$. 115. $y = 0$. 117. Область задания, существования и единственности решения
 задачи Коши—вся плоскость (x, y); $y = b$ —изоклины (рис. 59); все решения, кро-
 ме $y \equiv 0$, возрастают (о всем интервале задания решения); интегральные кривые,
 лежащие в верхней (нижней) полуплоскости, вогнуты вверх (вниз). 125. $y =$
 $= \frac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1} - x$; $y = -x \pm 1$ —частные решения (асимптоты). 126. $y' = y^2$.
 127. $y' = p/y$. 128. $y = \ln x$. 129. $y = e^x$. 130. $y = x^2$, $x \geq 0$; $y = 0$. 131. $y = 0$.
 132. $y = Ce^{kx}$. 133. $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$, T —температура тела в момент времени t ;
 $T = 20 + 80 \cdot 2^{-t/20}$; 60 мин. 134. $\frac{dp}{dh} = -kp$; $p = 0,92^{h/500}$. 135. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{a}$,

$= Ce^{\theta/a}$. 136. $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$; $y^2 = 2p(x + C)$. 137. $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - y^2}{2ay}$; $y^2 = a^2 +$
 $+ Ce^{-x/a}$. 138. $x^2 + y^2 + x^4 + y^4 = C^2$. 139. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = C$. 140. $\arcsin x +$
 $+ \arcsin y = C$. 141. $x^2 - \sqrt{1-y^2} = C$, $y = \pm 1$. 142. $y = 1 + C(x+1)$, $x \neq -1$;
 $y = -1$ ($y \neq 1$). 143. $e^y - e^x = C$. 144. $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C$ ($x > 0$, $y > 0$), $y = 0$
 $(x > 0)$, $x = 0$ ($y > 0$). 145. $2\sqrt{y} = \ln|x| + C$, $y = 0$ ($x \neq 0$). 146. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} +$
 $+ \left| \frac{y}{x} \right| = C$. 147. $2e^y - e^{2x} + 2\operatorname{arctg} y + \ln(1+y^2) = C$. 148. $y = C/(x-1)$;
 $y = 1/(1-x)$. 149. $y = \arcsin x + C$, $x = \pm 1$; $y = \arcsin x$, $x = 1$. 150. $\sqrt{1-x^2} +$
 $+ \sqrt{1-y^2} = C$, $y = \pm 1$ ($|x| < 1$), $x = \pm 1$ ($|y| < 1$); $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$,
 $x = 1$ ($|y| < 1$); решения нет. 151. $y = Cx$ ($x \neq 0$); $y = x$ ($0 < x < +\infty$), $y = 0$
 $(0 < x < +\infty)$; $x = 0$ ($0 < y < +\infty$); все интегральные кривые. 152. $y = e^{\sin x}$.
161. (0, 0), (1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1) — особые точки; $(x^2-1)(y^2-1) = C$,
 $0 < C < 1$, $|x| < 1$, $|y| < 1$; $(x^2-1)(y^2-1) = C$, $C < 0$, $|x| > 1$, $|y| < 1$ и $|x| < 1$,
 $|y| > 1$; $(x^2-1)(y^2-1) = C$, $C > 0$, $|x| > 1$, $|y| > 1$, $x = \pm 1$ ($y \neq \pm 1$), $y = \pm 1$
 $(x \neq \pm 1)$ — частные решения; $x = \pm 1$ ($|y| > 1$), $y = \pm 1$ ($|x| > 1$) — асимптоты
интегральных кривых; $x = 0$, $y = 0$ — центр, $|x| < 1$, $|y| < 1$ — область центра
(рис. 60). 162. $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{\sin x}$. 163. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy(1-y^2)}{1+x^2}$. 164. $\Phi(\psi_1) = \sin \psi_1$,
 $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$. 165. $\Phi(\psi_1) = \operatorname{tg} \psi_1$, $\frac{x+y}{1-xy} = C$. 177. $\frac{dy}{dx} =$
 $= -\frac{y}{x}$; $xy = C$; $xy = 6$. 178. $\frac{dr}{d\theta} = r \operatorname{ctg} \theta$; $r = C \sin \theta$. 179. $\frac{k_2 y}{k_1 x} = -\frac{1}{y'}$;
 $k_1 x^2 + k_2 y^2 = C^2$. 180. $0,006 \sqrt{2gh} dt = (2h - h^2) dh$, t — время; $\cong 35,2$ с.
181. $\frac{x\sqrt{Y} + y\sqrt{X}}{1 - k^2 x^2 y^2} = C$, $X = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$, $Y = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2)$.
182. $x^3 + 3x^2 y - y^3 = C$. 184. $\sqrt{x^2 + y^2} = C \exp\left(-\frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)$ или $r =$
 $= C \exp\left(-\frac{p}{q} \theta\right)$. 185. $y = C|x|^b + \frac{a}{1-b} x$ ($x \neq 0$) при $b \neq 1$, $y = Cx +$
 $+ ax \ln|x|$ ($x \neq 0$) при $b = 1$. 186. $y = C|x|^{3/2} - x$ ($x \neq 0$). 187. $y = Cx^{-2} -$
 $-\frac{1}{3} x$ ($x \neq 0$). 188. $y = Cx + 2x \ln|x|$ ($x \neq 0$). 189. $x^2 - 2xy + 2y^2 = C$.
190. $x = y(C + \ln|y|)$ ($y \neq 0$). 191. $x = y(C - \ln|y|)$ ($y \neq 0$). 192. $\sqrt{x^2 + y^2} =$
 $= C \exp\left(-\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)$. 193. $x^2 - y^2 = C$. 194. $2y^3 - 3xy^2 + 6x^2 y = C$. 195. $y =$
 $= \frac{C}{2} x^2 - \frac{1}{2C}$ ($C > 0$); $y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2}$. 196. $y = xe^{1+Cx}$, $y = 0$ ($x \neq 0$),
 $y = ex$ ($x \neq 0$), $x = 0$ ($y \neq 0$); $y = xe^{1-x}$; $y = 0$ ($0 < x < +\infty$). 197. $y = x \ln(C + \ln|x|)$
 $(|x| > e^{-C})$; $y = x \ln(1 + \ln x)$ ($x > 1/e$). 198. $y = Cx^2 - x$ ($x \neq 0$); $x = 0$ ($y \neq 0$); все ин-
тегральные кривые. 199. $y = C\sqrt{x} + 2x$ ($x > 0$), $y = -C\sqrt{-x} + 2x$ ($x < 0$),
 $x = 0$ ($y \neq 0$); все интегральные кривые. 200. $y = \frac{C}{x} + \frac{1}{2} x$, $x = 0$ ($y \neq 0$);

$y = \frac{1}{2}x$ ($x \neq 0$), $x = 0$ ($y \neq 0$). 201. $y = Cx + x \ln|x|$ ($x \neq 0$), $x = 0$ ($y \neq 0$);
 все интегральные кривые. 202. $y = -x$ ($x \neq 0$). 203. Нет. 204. $y = \pm 2x$ ($x = 0$).
 205. $y = 0$ ($x \neq 0$). 206. $y = kx$ ($x \neq 0$). 207. Нет. 208. $y = 0$ ($x \neq 0$). 209. $y = 0$
 ($x \neq 0$), $y = 2x$ ($x \neq 0$). 218. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$. 219. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. 220. $\frac{dy}{dx} =$
 $= \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$. 221. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$. 222. $xdx + (y - \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0$. 223. $y' =$
 $= \frac{x+y}{x}$. 224. $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$, $x^2 + y^2 - Cx = 0$; $y' = -\frac{y}{x}$, $y = \frac{C}{x}$.
 ($C \neq 0$); $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = \frac{C}{2}x^2 - \frac{1}{2C}$ ($C > 0$); $xy' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$,
 $y = -\frac{1}{2C}x^2 + \frac{C}{2}$ ($C > 0$). 225. $\frac{y}{y'} = \frac{x+y}{2}$, $(x-y)^2 - Cy = 0$.

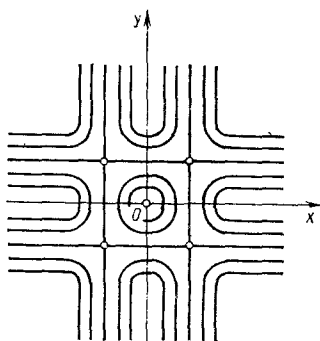


Рис. 60

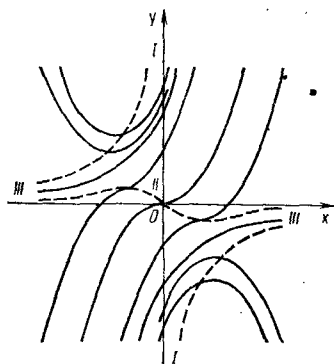


Рис. 61

226. $\frac{y - xy'}{yy' + x} = k$, $\sqrt{x^2 + y^2} = C \exp\left(-\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)$ или $r = C \exp\left(-\frac{\theta}{k}\right)$.
 227. $\frac{yy' + x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k$, $\sqrt{x^2 + y^2} = kx + C$. 228. $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$, $(x-C)^2 + y^2 = C^2$.
 229. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 - Cy = 0$. 231. $x^2 + y^2 - xy + x - y = C$. 232. $x^2/2 +$
 $+ y^2 - xy + y = C$. 233. $x + 2y + 3 \ln|x + y - 2| = C$. 235. $y^4 - x^2 = Cy^6$.
 236. $y^2 = Ce^{y^2/x}$. 237. $x^2y^2 + 1 = Cy$. 238. $\sqrt{y^2 - x} - \sqrt{x} = C$, $x = y^2$. 239. $y =$
 $= Ce^{-\cos x} - \cos x + 1$. 240. $y = Ce^{-ax} + \frac{1}{m+a} e^{mx}$ при $m \neq -a$, $y^{-ax}(C+x)$
 при $m = -a$. 241. $y = (1+x^2)(C+x)$. 242. См. ответ к задаче 185. 243. $x = \frac{C}{y^2} -$
 $-\frac{2}{3}y$. 244. $x = y^2(Ce^{1/y} + 1)$. 245. $\sin y = Ce^{-x} + x - 1$. 246. $y = x(C+x)$.
 247. $y = x^2(x^2/2 + C)$. 248. $y = e^{-x^2}(C+x^2)$. 249. $y_1 = x$; $y = x + Ce^{-x}$. 250. $y_1 = e^x$;
 $y = e^x + Ce^{-x}$. 251. $y_1 = x$; $y = x + Ce^{-x^2/2}$. 252. $y_1 = 1/x$; $y = 1/x + Ce^{-x}$.

$$253. y_1 = -1; y = -1 + C(x + x^2). \quad 254. y = -1/x^3 + 2/x^2. \quad 255. y = e^{x^2} \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

$$256. y = Cx^2 - x \quad (x \neq 0); x = 0 \quad (y \neq 0). \quad 257. y = C\sqrt{|x|} + 2x \quad (x \neq 0), x = 0 \quad (y \neq 0). \quad 258. y = \frac{1}{2}x \quad (x \neq 0), x = 0 \quad (y \neq 0). \quad 259. y = Cx + x \ln|x| \quad (x \neq 0);$$

$x = 0 \quad (y \neq 0)$. 261. $xy = -1$ — линия экстремумов (при $x > 0$ — линия максимумов, при $x < 0$ — линия минимумов (рис. 61)), $y + x(xy + 1) = 0$ — линия точек перегиба (слева от точки пересечения с этой линией интегральные кривые вогнуты

вниз, справа — вверх). Общее решение в форме Ксши: $y = e^{x^2/2} \left(y_0 + \int_0^x e^{-x^2/2} dx \right)$,

$$y_0 = y(0); \text{ так как } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \int_0^x e^{-x^2/2} dx = \pm \sqrt{\pi/2}, \text{ то поведение решений при}$$

$x \rightarrow \pm \infty$ зависит от положения начального значения y_0 относительно $\pm \sqrt{\pi/2}$.

Если $y_0 < -\sqrt{\pi/2}$, то $y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow \pm \infty$; если $y_0 = -\sqrt{\pi/2}$, то $y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$; если $-\sqrt{\pi/2} < y_0 < \sqrt{\pi/2}$, то $y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$; если $y_0 = \sqrt{\pi/2}$, то $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$; если $y_0 > \sqrt{\pi/2}$, то $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \pm \infty$. Интегральные кривые, соответствующие $y_0 = \pm \sqrt{\pi/2}$, являются сепаратрисами. Они делят семейство интегральных кривых на три класса с одинаковым характером поведения на бесконечности: 1) интегральные кривые, уходящие в $-\infty$ при $x \rightarrow \pm \infty$; 2) интегральные кривые, уходящие одним концом в $-\infty$, другим в $+\infty$; 3) интегральные кривые, уходящие обоими концами в $+\infty$. (На рис. 61 I — линия экстремумов, II — линия точек перегиба, III — сепаратриса.)

$$263. \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{A}{L} \sin \omega t; i = i_0 e^{-(R/L)t} + \frac{A(R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{AL\omega}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-(R/L)t}.$$

$$264. \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -\frac{2a^2}{y^2}; x = Cy + \frac{a^2}{y}. \quad 265. y - xy' = (x + y)/n; y =$$

$$= Cx^{(n-1)/n} - x. \quad 266. \int_0^x y dx = kxy; y = Cx^m, m = (1 - k)/k. \quad 267. \int_0^x xy dx =$$

$$= \frac{3}{4} x \int_0^x y dx; y = Cx^2. \quad 268. x^2 y' + (3x - 1)y = 0; y = Ce^{-1/x}/x^3. \quad 271. y =$$

$$= \frac{e^{kx}}{e^{-k\omega} - 1} \int_x^{x+\omega} f(t) e^{-ht} dt. \quad 272. y = Cy_1. \quad 273. y = y_1 + C(y_2 - y_1).$$

$$274. y' - \frac{y_1'}{y_1} y = 0. \quad 276. t = \int p(x) dx, \frac{dy}{dt} + y = 0, y = Ce^{-\int p(x) dx}.$$

$$277. \alpha(x) = e^{-\int p(x) dx}, z' = 0, z = C, y = Ce^{-\int p(x) dx}. \quad 278. \alpha(x) = e^{-\int p(x) dx}, z' = q(x) e^{\int p(x) dx}, y = e^{-\int p(x) dx} \left(C + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right). \quad 279. dy/dy_0 = 1, dy/dx_0 =$$

$$= y_0 p(x_0). \quad 280. dy/dy_0 = 1, dy/dx_0 = y_0 p(x_0) - q(x_0). \quad 290. y^{-2} = Ce^{2x^2} + x^2 + 1/2.$$

$$291. 1/y = Cx + \ln x + 1; 1/y = \ln x + 1. 292. y^3 = Ce^{-x} - x + 1. 293. y = \left(Ce^{x^3} - \frac{1}{9} x^3 - \frac{2}{9} \right)^3, y = 0; y = \left(\frac{2}{9} e^{x^3} - \frac{1}{9} x^3 - \frac{2}{9} \right)^3, y = 0.$$

$$294. 1/y = Ce^{-x} - x + 1; y = 0. 295. y = \frac{x}{-x + C}; y = 0 (x \neq 0), x = 0 (y \neq 0).$$

$$296. 1/y = x(C - \ln |x|), x = 0; y = 0 (x \neq 0), x = 0 (y \neq 0). 297. x^2 = Ce^{\sin y} - 2a(\sin y + 1). 298. yy' = (x^2 + y^2)/2; y^2 = Ce^x - x^2 - 2x - 2 (C > 0). 299. yy' + x = y^2/x; y^2 = 2x^2(C - \ln |x|) или x^2 e^{y^2/x^2} = C. 300. y + x/y' = x^2/y; y^2 e^{x^2/y^2} = C.$$

$$301. y - xy' = y^2; y = x/(x + C). 303. C(y - x)^2 + x^2 - 1 = 0. 304. (x^2 - y)^2 = C(x^2 + y^2).$$

$$305. x^3 + xy^2 + 2y = C. 306. \int \frac{dz}{\varphi(z)} = -\frac{1}{x} + C, z = \frac{y}{x}. 307. y_1 = x + 1,$$

$$y = x + 1 + e^{x^2/2 + 2x} \left(C - \int e^{x^2/2 + 2x} dx \right)^{-1}. 308. y_1 = x, y = x + \frac{1}{1 + Cx}.$$

$$309. y = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x(C + \ln |x|)}. 310. y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x(C - \ln x)}. 311. y =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3 + C}. 312. \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2xy + 1}{\sqrt{3}} = \ln |x| + C. 313. y = u/x,$$

$$x^{2/3} = t, u = \frac{t}{-1/3 + v}, v = \omega \sqrt{t}, \omega = \operatorname{tg}(C - 3\sqrt{t}). 314. \dot{y} = u/x,$$

$$x^{-2/3} = t, u = 1 + t/v, v = 1/3 + t/\omega, \omega = z\sqrt{t}, z = \frac{1 + Ce^6 \sqrt{t}}{1 - Ce^6 \sqrt{t}}.$$

$$317. y = \frac{x + C - 1}{x(x + C)}. 318. xy = \operatorname{tg}(x + C) (-\pi/2 - C < x < \pi/2 - C). 319. y =$$

$$= \operatorname{tg}(4x + C) + x^2/2 (-\pi/8 - C/4 < x < \pi/8 - C/4). 320. y = 2 \operatorname{tg}(2x + C) + x^2$$

$$(-\pi/4 - C/2 < x < \pi/4 - C/2). 321. y = (\sqrt{2}/x) \operatorname{tg}(\sqrt{2}x + C) - 1/x^2 (-\pi/(2\sqrt{2}) -$$

$$- C/\sqrt{2} < x < \pi/(2\sqrt{2}) - C/\sqrt{2}). 322. y = 2x \operatorname{tg}(2x + C) + 2 (-\pi/4 -$$

$$- C/2 < x < \pi/4 - C/2). 323. \frac{y - y_1}{y - y_1}; \frac{y_2 - y_2}{y_3 - y_1} = C. 332. В окрестности$$

любой точки плоскости (x, y) правая часть уравнения (9) непрерывна и имеет непрерывную частную производную по y , следовательно, выполняются условия теоремы Пикара существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (9), а равенство $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ означало бы, что решение $y(x)$, определяемое условием $y(x_0) = y_1(x_0)$, не единственно. 333. Коэффициенты уравнения (9) находят из системы

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x), \\ y_2' &= P(x)y_2^2 + Q(x)y_2 + R(x), \\ y_3' &= P(x)y_3^2 + Q(x)y_3 + R(x). \end{aligned} \right\}$$

Определитель ее

$$\begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

есть определитель Вандермонда, который не обращается в нуль, если выполнено условие $y_1 < y_2 < y_3$. 334. Коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ находят также, как и в предыдущей задаче. Окончательный вид уравнения

$$\begin{vmatrix} y' - y^2 & y & 1 \\ y'_1 - y_1^2 & y_1 & 1 \\ y'_2 - y_2^2 & y_2 & y \end{vmatrix} = 0.$$

335. Если корни уравнения (12) комплексные, то правая часть уравнения (11) есть квадратный трехчлен, представимый в виде суммы квадратов, и, следовательно, сохраняет знак при всех значениях аргумента. 336. При произвольном значении x_0 и y_0 ($y_0 > \max y_2$ или $y_0 < \min y_1$) правая часть уравнения (11) положительна, следовательно, решение, определяемое условием $y(x_0) = y_0$, возрастает при $x = x_0$. Если бы оно стало равным y_0 при некотором $x_1 > x_0$, а при $x_0 < x_1$ превышало y_0 , то при $x = x_1$ оно не могло бы быть возрастающим. 337. Подставляем решения y_1 и y_2 в уравнение (12):

$$\left. \begin{aligned} y'_2 - y_2^2 + p(x)y_2 + q(x) &= 0 \\ y'_1 - y_1^2 + p(x)y_1 + q(x) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем $y'_2 - y'_1 = y_2^2 - y_1^2 + p(x)(y_2 - y_1) = (y_2 - y_1)(y_1 + y_2 + p(x))$, что и приводит к равенству (13). Левая часть равенства (13) есть производная от функции $\ln |y_2 - y_1|$, непрерывной в силу того, что $y_2 \neq y_1$ для всех значений x . 338. Если бы уравнение (11) имело три непрерывных периодических решения $y_1 < y_2 < y_3$, то имели бы место равенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y'_2 - y'_1}{y_2 - y_1} &= y_1 + y_2 + p(x), \\ \frac{y'_3 - y'_1}{y_3 - y_1} &= y_1 + y_3 + p(x). \end{aligned} \right\}$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем $\frac{y'_2 - y'_1}{y_2 - y_1} - \frac{y'_3 - y'_1}{y_3 - y_1} = y_2 - y_3$,

чего быть не может, так как правая часть всегда отрицательна, а левая часть есть производная от непрерывной периодической функции $\ln \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$. 339. $U \equiv x^2 +$

$+ y^2 = C^2$. 340. $U \equiv y/x = C$. 341. $U \equiv x/y = C$. 342. $U \equiv \arctg(y/x) = C$.

343. $U \equiv x^2 + y^2 - xy + x - y = C$. 344. $U \equiv x^2 + y^2 + 2 \arctg(x/y) = C$.

345. $U \equiv \sqrt{1 + x^2 + y^2} + \arctg(y/x) = C$. 346. $U \equiv \sqrt{x^2 - y^2} - x = C$.

347. $(e^y - 1)/(1 + x^2) = C$. 348. $x^2/y^3 - 1/y = C$. 349. $x + ye^{x/y} = C$.

350. $\ln |x + y| - y/(x + y) = 0$. 351. $x^2 - y^2 + 2xy = 0$ ($x^2 + y^2 \neq 0$). 352. Решения нет. 353. $U \equiv xy = C$, $U_1 \equiv \ln x + \ln y = C_1$, $U_1 = \ln U$. 354. $x^2 - y^2 + 2xy = C$.

355. $x - y/x = C$. 356. $x^2 + y - x/y + \ln |y| = C$. 357. $x^2/2 + x/y = C$.

358. $e^x(x \sin y - \sin y + y \cos y) = C$. 359. $x^2y^2 + 2 \ln(x/y) = C$. 360. $2(x^2 - y^2)^2 +$

$+ x^2 + y^2 = C$. 361. $x^2 + y^2 = C(y - 1)^2$. 362. $y^3 + x^2y + 2xy^2 + \ln |x + y| = C$.

363. $\mu = 1/x^2$, $y/x - \ln x = C$. 364. $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$, $\sqrt{x^2 + y^2} = C \exp\left(-\frac{p}{q} \times\right.$

$\times \arctg \frac{y}{x}$), $r = C \exp\left(-\frac{p}{q} 0\right)$. 365. $\mu = 1/\sqrt{xy}$, $\sqrt{y/x} - \ln |x| = C$, $y = 0$

($x \neq 0$). 366. $\mu_1 = \frac{1}{x^2}$, $\mu_2 = \frac{1}{(x^2 - y^2 - 1)^2}$, $x^2 - y^2 - 1 = Cx$. 367. $x \sqrt{1 - y^2} +$

$$+ y \sqrt{1-x^2} = C. \quad 368. \quad x^2 + 2xy - y^2 = C. \quad 369. \quad \frac{2}{y} dx + \frac{1}{xy} dy = 0, \quad \mu_1 = xy,$$

$$U_1 = x^2 + y; \quad \frac{y}{x^3} dx - \frac{2}{x^2} dy = 0, \quad \mu_2 = x^2/y, \quad U_2 = x/y^2; \quad \mu = xy, \quad x^2 + y - y^2/x = C.$$

370. Если $a\beta - b\alpha \neq 0$, то $\frac{(x^b y^a)^k}{k} + \frac{(x^b y^a)^l}{l} = C$, где k и l находятся из системы $ak - \alpha l = -n$, $bk - \beta l = -m$; если $a\beta - b\alpha = 0$, то $x^b y^a = C$. (Указание. Если $a\beta - b\alpha \neq 0$, то $axdy + bydx = 0$, $\mu_1 = 1/(xy)$, $U_1 = x^b y^a$; $x^m y^n (axdy + bydx) = 0$, $\mu_2 = \frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}}$, $U_2 = x^b y^a$; $\mu = \frac{1}{xy}$ $\Phi(x^b y^a) = \frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}} \Psi(x^b y^a)$. Возьмем $\Phi(U_1) = U_1^k$, $\Psi(U_2) = U_2^l$; $\mu = \frac{1}{xy} (x^b y^a)^k = \frac{1}{x^{m+1} y^{n+1}} (x^b y^a)^l$. Приравнявая показатели степеней, получаем систему для определения k и l . Если $a\beta - b\alpha = 0$, то данное уравнение сводится к уравнению $axdy + bydx = 0$.)

Глава II

522. $(y - x^2/2 - C)(y^2/2 - x - C) = 0$; $y = x^2/2 + 1/2$, $y^2/2 = x - 1/2$.
 523. $(\sqrt{y} - x - C)(\sqrt{y} + x - C) = 0$, $y = 0$; $y = x^2$ ($x \geq 0$), $y = (x-2)^2$ ($x \leq 2$); $y = (x-1)^2$, $y = 0$.
 524. $(\sqrt{|y|} - x - C)(\sqrt{|y|} + x - C) = 0$, $y = 0$.
 525. $(y - \sqrt{|x|} - C)(y + \sqrt{|x|} - C) = 0$ при $x \neq 0$; $x = 0$.
 526. $(x+C)^2 + y^2 = a^2$, $y = \pm a$.
 527. $(y-C)(y - \sqrt{x} - C)(y + \sqrt{x} - C) = 0$, $x = 0$.
 528. $(y - x^2/2 - C) \times (\sqrt{y} - x - C)(\sqrt{y} + x - C) = 0$, $y = 0$; $y = x^2/2 + 1$, $y = (x+1)^2$ ($x \geq -1$), $y = (x-1)^2$ ($x \leq 1$); $y = x^2/2 - 1/2$, $y = (x-1)^2$ ($x \geq 1$), $y = (x-1)^2$ ($x \leq 1$), $y = 0$; $y = x^2/2$, $y = x^2$ ($x \geq 0$), $y = x^2$ ($x \leq 0$), $y = 0$.
 529. $(y - x^2/2 - C)(y - Ce^{-x} + x - 1) = 0$.
 530. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C$ при $x > 1$, $y = -\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$ при $x < -1$; $x = \pm 1$.
 531. $(y - C/x) \times (y - C/x^2) = 0$.
 532. $y = -x^5/4$ — особое решение.
 533. Особых решений нет.
 534. $y = 0$ — особое решение (рис. 62).
 535. Особых решений нет.
 536. $y = 0$ — особое решение.
 537. $y = \pm a$ — особые решения.
 538. $y = 0$ — особое решение.
 539. $-y/y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y^2 = 2C(x + C/2)$.
 540. $|y| \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y^2 - x^2 = C$, $x^2 + y^2 = C^2$.
 541. $(y' - 2x)^2 = y - x^2$.
 542. $xyy'^2 + (x^2 - y^2 - C^2)y' - xy = 0$.
 543. $y = -x + C$.
 544. $\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 - 3\frac{y-C}{x} + 1 = 0$.
 548. $x = at + bt^2$, $y = \frac{a}{2}t^2 + \frac{2b}{3}t^3 + C$.
 549. $x = \pm a \cos^3 t$, $y = \mp \frac{a}{3} \sin^3 t + C$, $x = 0$.
 550. $x = t^3 + 1$, $y = \frac{3}{4}t^4 + C$.
 551. $x = \frac{1+t}{t^3}$, $y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t} + C$; $x = 0$.
 552. $x = t \ln t$, $y = \frac{t^2}{2} \ln t + \frac{t^2}{4} + C$.
 553. $x = \frac{t}{1-t^3}$, $y = \frac{1}{6} \frac{-1+4t^3}{(1-t^3)^2} + C$.

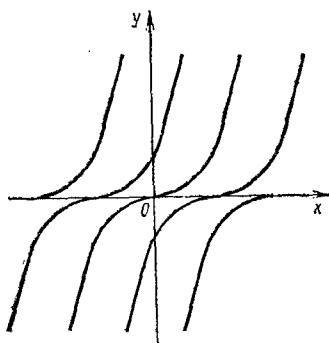


Рис. 62

554. $x = t - \frac{1}{t} + C$, $y = \frac{t^2}{2} + \ln t$. 555. $x = 2t + 3t^2 + C$, $y = t^2 + 2t^3$; $y = 0$.
556. $x = 3(\operatorname{ctg} t + t) + C$, $y = a \cos^3 t$. 557. $x = C_1 - t + \ln \frac{1+t}{\sqrt{t^2-t+1}} + \sqrt{3} \arctg \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$. 558. $x = \mp a \ln |\operatorname{tg}(\pi/4 - t/2)| + C$, $y = \pm a/\cos t$.
559. $y = Cx^2 + 1/C$, $y = \pm 2x$. 560. $x = Ce^{-p} - 2p + 2$, $y = x(1+p) + p^2$.
561. $x = \frac{C}{\sqrt{p}} + \frac{2}{3}p$, $y = -xp + p^2$. 562. $y = \frac{1}{C}(x-C)^2$ ($C \neq 0$); $y = 0$.
- $y = -4x$. 563. $y = Cx - C^2$; $y = x^2/4$. 564. $y = Cx - a\sqrt{1+C^2}$, $x^2 + y^2 = a^2$ ($ay < 0$). 565. $y = Cx - \sqrt{1-C^2}$; $y^2 - x^2 = 1$ ($y > 0$). 566. $x = 2p + \ln|p-1| + C$, $y = p^2 + p + \ln|p-1| + C$. 567. $x = Cy + C^2$; $x = -y^2/4$. 568. $y = xy' + 2ay'/(y' - 1)$; $(y - x - 2a)^2 = 8ax$. 569. $y = xy' + 2a\sqrt{-y'}$; $xy = a^2$. 570. Если $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ — данные точки, а b^2 — произведение расстояний F_1N_1 и F_2N_2 от этих точек до касательной к кривой в точке $M(x, y)$, причем точки F_1 и F_2 лежат с одной стороны от касательной, то
- $$y = xy' + \sqrt{b^2(1+y'^2) + c^2y'^2}; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 = b^2 + c^2).$$
- Если F_1 и F_2 лежат по разные стороны от касательной, то нужно заменить b^2 на $-b^2$; вместо эллипса получим гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a^2 = c^2 - b^2$). 572. $y = \frac{C}{2}x^2 + C^2$;
- $y = -\frac{x^4}{16}$. 573. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{Cx^2}{2} + C^2$; $y = -\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{3}$. 574. $x = -\frac{1}{2}p^2 + Cp$, $y = -\frac{p^3}{3} + \frac{Cp^2}{2} + C^2$; $x = \frac{p^3}{4} - \frac{p^2}{2}$, $y = \frac{3}{16}p^4 - \frac{p^3}{3}$. 575. $x = \frac{1}{C} \ln y - C^2$; $x = -3\left(\frac{\ln y}{2}\right)^{2/3}$. 576. $x^2/2 + y^2 = C$.
577. $y - b = C(x - a)$ ($x \neq a$). 578. $r = Ce^{\theta}$. 579. $r = C$. 580. $(x^2 + y^2)^2 = C(x^2 - y^2)$. 581. $r = C\sqrt{1 + \cos^2 \theta}$. 583. $y = Cx$ ($x \neq 0$). 584. $y = Cx^2$.

Глава III

632. $y = \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$. 633. $y = \ln|x| + C_1x^2 + C_2x + C_3$.
634. $y = \int_0^x (x-t) \sin t^2 dt + C_1x + C_2$. 635. $y = \frac{1}{x^2-1} + C_1x + C_2$. 636. $y = e^x + 1/\sqrt{x} + C_1x + C_2$. 637. $y = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin t}{t} (x-t)^2 dt + C_1x^2 + C_2x + C_3$.
638. $x = \sin t - 2t$, $y = \frac{3}{8} \sin 2t - \frac{t}{4} \cos 2t + (C_1 - 2 - t^2) \sin t + \left(-2C_1 + \frac{1}{2}\right)t + \frac{2}{3}t^3 + C_2$. 639. $x = e^{-t} + t$, $y = (t/2 + 3/4)e^{-2t} + (t^2/2 - 1 + C_1)e^{-t} + t^3/6 + C_1t + C_2$. 640. $x = \sin t$, $y = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \sin 2t + C_1 \sin t +$

$+ C_2$ при $\cos t > 0$; $x = -\sin t$, $y = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t - C_1 \sin t + C_2$ при $\cos t < 0$. 641. $y = x^2/2 + C_1x + C_2$. 642. $y = x^2/2 + y'_0x - x_0x + y_0 + x_0^2/2 - y'_0x_0$; $y = x^2/2$; $y = x^2/2 + x$; $y = x^2/2 - x$; $y = \frac{1}{2}x(x-1)$. 643. $y = x^2 - 1$ ($|x| \leq 1$) (рис. 63). 644. $y = -x^3$ (рис. 64). 645. $y = -e^{-x} + x^2/2 - x + 1$.

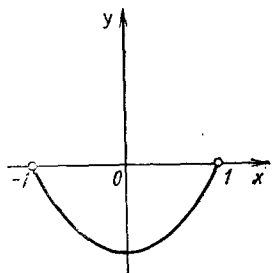


Рис. 63

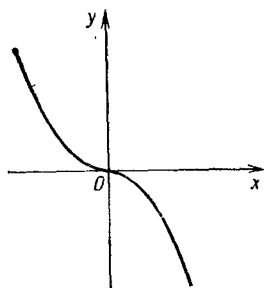


Рис. 64

646. $y = \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^t}{t} (x-t)^2 dt$. 647. $y = -C_1x + (C_1^2 + 1) \ln |C_1 + x| + C_2$.

648. $y = \frac{1}{C_1} e^{C_1x+1} \left(x - \frac{1}{C_1}\right) + C_2$, $y = ex^2/2 + C$. 649. $y = C_1x^2 + C_2$.

650. $y = \pm a \arcsin (C_1 e^{x/a}) + C_2$. 651. $y = C_1 (x \ln x - x) + C_2$.

652. $y = -\sqrt{1-x^2} + 2$. 653. $y = \frac{2}{3} \left(\left(\frac{x}{2} + 1 \right)^3 - 1 \right)$ ($x \geq -2$), $y = -\frac{2}{3} \left(\left(-\frac{x}{2} + 1 \right)^3 - 1 \right)$ ($x \leq 2$); $y = x^3/12$ ($x \geq 0$), $y = x^3/12$ ($x \leq 0$),

$y = 0$. 654. $y = x^2 - x$, $y = -x^2 - x$; $y = 0$, $y = x^3/3$. 655. $y = y_0'' \int_0^x e^{-t^2} (x-t) dt +$

$+ y'_0x + y_0$. 656. $\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \pm \frac{1}{R}$. 657. $3y'y''^2 - (1+y'^2)y''' = 0$.

658. $y \ln |y| + x + C_1y + C_2 = 0$, $y = C$. 659. $(\pm 4\sqrt{y} + C_1)^{3/2} - 3C_1(\pm 4\sqrt{y} + C_1)^{1/2} = \pm 12x + C_2$. 660. $2C_1y = (\pm C_1x + C_2)^2 + 1$. 661. $(C_1y - 1)^{3/2} =$

$= \pm \frac{3C_1^4}{2}x + C_2$. 662. $y = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$). 663. $y = 3 \ln \frac{3}{|x|}$

($x < 0$). 664. $y = -x + 1$. 665. $y = 1 - e^x$, $y = -1 + e^{-x}$. 666. $1 + y'^2 = kyy''$;

$y = \pm \frac{1}{C_1} \operatorname{ch} (C_1x + C_2)$ при $k = 1$. (Указание. Уравнение $y'^2 + 1 = C_1^2 y^2$

интегрировать в параметрической форме, положив $y = \frac{1}{C_1} \operatorname{ch} t$; $(x + C_2)^2 +$

$+ y^2 = C_1^2$ при $k = -1$, $2C_1y = (\pm C_1x + C_2)^2 + 1$ при $k = 2$, $x = C_1(\theta - \sin \theta) + C_2$;

$y = C_1(1 - \cos \theta)$ при $k = -2$. Уравнение $y(1 + y'^2) = C_1$ интегрировать в параметрической форме, положив $y' = \operatorname{ctg} t$. 667. $y'' = 1/(ky^3)$; $kC_1y^2 = C_1^2(x + C_2)^2 + k$.

368. $Hy'' = S\sqrt{1 + y'^2}$, где H — величина горизонтального натяжения; S — вес единицы длины каната; $y = (1/k) \operatorname{ch} k(x + C_2) + C_1$, $k = S/H$. 669. $\ln |y| = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{b} + \frac{C_1}{b_2} \ln |C_1 + b\sqrt{a^2 - x^2}| + C_2$. 670. $y = C_2 \exp\left(\frac{x}{2C_1} + \frac{C_1}{2x}\right)$.

671. $C_2x \exp(-C_1/x)$. 672. $\ln |y| = C_1(x^2 + x\sqrt{1 + x^2} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})) + C_2$. 673. $y \ln y + \ln x + C_1y + C_2 = 0$. 674. $y = \arcsin(C_2x) + C_1x$.

675. $y = x^2 \left(-\frac{1}{2} \ln^2 x + C_1 \ln x + C_2\right)$. 676. $y = \sqrt{C_1} \operatorname{tg}(\sqrt{C_1}x + C_2) (-\pi/2 <$

$< \sqrt{C_1}x + C_2 < \pi/2)$. 677. $\int e^{-y^2/2} dy = C_1x + C_2$. 678. $\int \frac{dy}{\ln(C_1y)} = x + C_2$.

679. $\frac{1}{\sqrt{C_1}} \ln |y + \sqrt{y^2 + C^2}| = x + C_3$ или $y = Ae^{Cx} + Be^{-Cx}$. 680. $(x - C_1)^2 +$

$+(y - C_2)^2 = 1$. 681. $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_3^2$. 682. $y = x(C_2 + x + C_1 \ln |x|)$.

683. $y = e^{-\sin x} (C_2 + C_1 \int e^{\sin x} dx)$. 684. $y = \pm \frac{2}{C_1} (C_1x - C_2)^{1/2} + C_3$, $y - C_1x +$

$+ C_2$; $y = x$. 685. $y = \frac{1}{C_1x + C_2} + 1$; $y = 2$. 686. $(y' - x^2)/y^2 = C_1$; $y = x^3/3$.

687. $y' = y^2/2 + C_1x + C_2$; $y = \operatorname{tg}(x/2) \quad (-\pi < x < \pi)$.

Глава IV

721. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$. 722. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$. 723. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$.

724. $y = C_1 + C_2e^{2x}$. 725. $y = C_1 + C_2e^{-3x}$. 726. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}$.

727. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} + C_3e^{-3x}$. 728. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-x} + C_4e^{-2x}$.

729. $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} + C_4e^{3x} + C_5e^{-3x}$. 730. $y = e^{x/2} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \right.$

$\left. + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$. 731. $y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. 732. $y = C_1 \cos 2x +$

$+ C_2 \sin 2x$. 733. $y = C_1e^x + e^{-x/2} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$.

734. $y = C_1e^{-2x} + e^x (C_2 \cos \sqrt{3} x + C_3 \sin \sqrt{3} x)$. 735. $y = C_1e^{2x} + C_2 \cos 3x +$

$+ C_3 \sin 3x$. 736. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. 737. $y = C_1 \cos x +$

$+ C_2 \sin x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$. 738. $y = e^{(\sqrt{2}/2)x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} x + \right.$

$\left. + C_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{2} x\right) + e^{-(\sqrt{2}/2)x} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} x + C_4 \sin \frac{\sqrt{2}}{2} x\right)$. 739. $y =$

$= C_1e^x + C_2e^{-x} + e^{x/2} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + e^{-x/2} \left(C_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \right.$

$\left. + C_6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$. 740. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{(\sqrt{3}/2)x} \left(C_3 \cos \frac{x}{2} + \right.$

$\left. + C_4 \sin \frac{x}{2}\right) + e^{-(\sqrt{3}/2)x} \left(C_5 \cos \frac{x}{2} + C_6 \sin \frac{x}{2}\right)$. 741. $y = e^{-2x} (C_1 + C_2x)$.

742. $y = C_1 + C_2 x$. **743.** $y = e^{2x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$. **744.** $y = C_1 e^{3x} + e^{2x} (C_2 + C_3 x)$.
745. $y = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 x$. **746.** $y = e^x (C_1 + C_2 x) + e^{-x} (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$.
747. $y = e^x (C_1 + C_2 x) + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. **748.** $y = e^{2x} (C_1 + C_2 x) + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$. **749.** $y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x$. **750.** $y = e^{-x/2} \times$
 $\times \left((C_1 + C_2 x) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + (C_3 + C_4 x) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$. **751.** $y = C_1 + (C_2 +$
 $+ C_3 x) \cos 2x + (C_4 + C_5 x) \sin 2x$. **752.** $y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \sin x$.
753. $y = -x^2 + x - 3 + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. **754.** $y = x^3 + x + C_1 + C_2 e^{1x}$. **755.** $y =$
 $= 1/2 + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$. **756.** $y = 3x + C_1 + C_2 e^{-x}$. **757.** $y = 2e^x + C_1 \cos x +$
 $+ C_2 \sin x$. **758.** $y = 2xe^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. **759.** $y = 2x^2 e^x + e^x (C_1 + C_2 x)$.
760. $y = e^x - 1 + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. **761.** $y = 3xe^{2x} + x^2 + 3x + 7/2 + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.
762. $y = \frac{1}{3} xe^{3x} + 3x^2 + 2x + C_1 + C_2 e^{3x}$. **763.** $y = \frac{1}{2} x^3 e^{-2x} + e^{-2x} (C_1 + C_2 x +$
 $+ C_3 x^2)$. **764.** $y = \frac{1}{2} x^3 + x^2 + C_1 e^x + C_2 + C_3 x$. **765.** $y = xe^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x} +$
 $+ C_3 \cos x + C_4 \sin x$. **766.** $y = -\sin x + 2 \cos x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. **767.** $y = -2 \sin 2x +$
 $+ C_1 \cos x + C_2 \sin x$. **768.** $y = 3 \sin 2x - 2 \cos 2x + e^{x/2} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \right.$
 $\left. + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$. **769.** $y = -\frac{1}{4} x \cos 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. **770.** $y =$
 $= \frac{1}{2} (e^x + x \sin x) + C_1 \cos x + C_2 \sin x$. **771.** $y = \frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x +$
 $+ C_1 \cos x + C_2 \sin x$. **772.** $y = e^x (x \cos x + \sin x) + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. **773.** $y =$
 $= x^2 e^x \cos x + e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. **774.** $y = x^2 \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
775. $y = \frac{3}{8} e^{2x} - \frac{1}{5} x \cos 2x + \frac{2}{5} x \sin 2x + C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$.
776. $y = x \cos x + 2xe^{-x} - 1 + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. **777.** $y =$
 $= -\frac{x^2}{8} \cos x + (C_1 + C_3 x) \cos x + (C_2 + C_4 x) \sin x$ **778.** $y = -\frac{1}{2} -$
 $-\frac{1}{10} \cos 2x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. **779.** $y = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} x \sin 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.
780. $y = -\frac{1}{30} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin 2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$. **781.** $y = \frac{1}{2} x \operatorname{sh} x +$
 $+ C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$. **782.** $y_1 = Ax + B$ при $k \neq 0$; $y_1 = x(Ax + B)$ при $k = 0$.
783. $y_1 = Ae^{ax}$ при $k \neq -a^2$; $y_1 = Axe^{ax}$ при $k = -a^2$. **784.** $y_1 = A \cos \omega x +$
 $+ B \sin \omega x$ при $\omega \neq k$; $y_1 = x(A \cos kx + B \sin kx)$ при $\omega = k$. **785.** $y_1 = Axe^{-x} +$
 $+ x(Bx + C)$. **786.** $y_1 = e^x ((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x)$. **787.** $y_1 = xe^x ((Ax +$
 $+ B) \cos x + (Cx + D) \sin x)$. **788.** $y_1 = x((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x)$.
789. $y_1 = A$ при $q \neq 0$; $y_1 = Ax$ при $q = 0$. **790.** $y_1 = (Ax^2 + Bx + C) \cos x +$
 $+ (Dx^2 + Ex + F) \sin x$. **791.** $y_1 = e^x (A \cos x + B \sin x) + x(Cx^2 + Dx + F)$.
792. $y_1 = x^2 e^x ((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x)$. **793.** $y_1 = x^2 (A \cos 2x + B \sin 2x) +$
 $+ C$. **794.** $y_1 = Ax^2 + Bx + C + x((Dx^2 + Ex + F) \cos 2x + (Gx^2 + Hx + I) \sin 2x)$.
795. $y = \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \frac{x}{2} \sin 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. **796.** $y =$
 $= \cos x \ln |\operatorname{tg}(\pi/4 - x/2)| + C_1 \cos x + C_2 \sin x$. **797.** $y = \frac{1}{2} e^x \int_{x_0}^x \frac{e^{-x}}{x} dx -$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} e^{-x} \int_{x_0}^x \frac{e^x}{x} dx + C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \quad 798. y = \frac{1}{\cos x} + \cos x \ln |\cos x| + \\
& + \sin x (-\operatorname{tg} x + x) + C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x. \quad 799. y = 1/x + e^x (C_1 + C_2 x). \\
& 800. y = e^x/x + C_1 + C_2 e^x. \quad 801. y = -4\sqrt{x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \quad 802. y = \sqrt{\sin 2x} + \\
& + C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad 803. y = e^x. \quad 804. y = 2 \operatorname{ch} x. \quad 805. y = \sin x. \quad 806. y = 0. \\
& 807. y = -\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x. \quad 808. y = -x + \operatorname{ch} x. \quad 809. y = \frac{3}{2} x^2 e^{-2x}. \\
& 810. y = 1. \quad 811. y = e^x. \quad 812. y = 0. \quad 813. y = \sin x. \quad 814. y = C \sin x. \quad 815. \text{Решения нет.} \\
& 816. y = \cos x + x. \quad 817. y = \operatorname{ch} x. \quad 818. \frac{d^2 x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + k^2 x = \\
& = f(t). \quad 819. x = A \sin(kt + \varphi), k - \text{частота колебаний, } T = 2\pi/k - \text{период, } A - \\
& \text{амплитуда, } \varphi - \text{начальная фаза; } A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/k^2}, \varphi = \operatorname{arctg}(kx_0/v_0); x = \\
& = \sin t; x = 2 \cos t = 2 \sin(t + \pi/2). \quad 820. x = C_1 e^{(-h + \sqrt{h^2 - k^2})t} + C_2 e^{(-h - \sqrt{h^2 - k^2})t} \text{ при } \\
& h^2 - k^2 > 0; x = e^{-ht} (C_1 + C_2 t) \text{ при } h^2 = k^2; x = Ae^{-ht} \sin(\sqrt{k^2 - h^2}t + \varphi) \text{ при } h^2 - \\
& - k^2 < 0, \sqrt{k^2 - h^2} - \text{частота колебаний, } T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}} - \text{период, } Ae^{-ht} - \text{амп-} \\
& \text{литуда, } A - \text{начальная амплитуда, } A = 2, \varphi = \pi/6. \quad 821. x = \frac{M}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t + \\
& + A \sin(kt + \varphi) \text{ при } \omega \neq k, x = -\frac{M}{2k} t \cos kt + A \sin(kt + \varphi) \text{ при } \omega = k. \\
& 823. \omega \neq 1. \quad 824. k^2 \neq 4. \quad 825. 0 < h < 1. \quad 826. k^2 > 1. \quad 827. q < 0. \quad 828. p > 0, q > \\
& > 0. \quad 829. p \geq 0, q > 0. \quad 830. p = 0, q > 0. \quad 831. \lambda_n = n^2, y_n = \sin nx \quad (n = \\
& = 1, 2, \dots). \quad 833. y_1 = \cos kx, y_2 = \sin kx/k. \quad 834. y_1 = \operatorname{ch} kx, y_2 = \frac{\operatorname{sh} kx}{k}. \\
& 835. y'' + y = 0. \quad 836. y''' + 2y'' + 5y' = 0. \quad 837. y^{(4)} - y = 0. \quad 838. \text{Her.} \quad 839. \text{Все} \\
& \text{решения периодические.} \quad 841. x = e^{2t}. \quad 842. x = 2te^{2t}. \quad 843. x = -2 \sin t. \quad 845. y = \\
& = C_1 x + C_2 x^3. \quad 846. y = C_1 x + C_2/x. \quad 847. y = C_1 \sqrt{|x|} + C_2/\sqrt{|x|}. \quad 848. y = \\
& = x^2 (C_1 + C_2 \ln |x|). \quad 849. y = C_1 \cos(2 \ln |x|) + C_2 \sin(2 \ln |x|). \quad 850. y = \frac{1}{x^2} \times \\
& \times (C_1 \cos(3 \ln |x|) + C_2 \sin(3 \ln |x|)). \quad 851. y = \sqrt{|x|} \left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln |x|\right) + \right. \\
& \left. + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln |x|\right) \right). \quad 852. y = C_1 + C_2 x^2. \quad 853. y = C_1 + C_2 \ln |x| + C_3 x^3. \\
& 854. y = C_1 + x(C_2 + C_3 \ln |x|). \quad 855. y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3. \quad 856. y = C_1 (x + \\
& + 1) + C_2 (x + 1)^2. \quad 857. y = (2x + 1) \ln |2x + 1| + C_1 (2x + 1) + C_2 (2x + 1)^2. \\
& 858. y_1 = x \ln^3 x + x(C_1 + C_2 \ln x). \quad 859. y = x + 1/x + C_1 + C_2 x^2. \quad 860. y = \\
& = -\ln x \cos \ln x + C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x. \quad 861. y'' + \frac{1}{(ax + b)^2} y = 0. \\
& 862. p(x) = a(q(x))^{1/2} - \frac{q'(x)}{2q(x)}. \quad 863. y = C_1 \cos \frac{n}{x} + C_2 \sin \frac{n}{x}. \quad 864. y = \\
& = C_1 e^{2\sqrt{|x|}} + C_2 e^{-2\sqrt{|x|}}. \quad 865. y = C_1 \cos 2\sqrt{|x|} + C_2 \sin 2\sqrt{|x|}. \quad 866. y = \\
& = C_1 \cos \operatorname{arctg} x + C_2 \sin \operatorname{arctg} x. \quad 867. y = C_1 \cos(n \operatorname{arccos} x) + C_2 \sin(n \operatorname{arccos} x). \\
& 868. y = C_1 \cos e^x + C_2 \sin e^x. \quad 869. y = C_1 \cos(m \ln |\cos x|) + C_2 \sin(m \ln |\cos x|). \\
& 870. y = -\frac{1}{4x} + C_1 e^{2/x} + C_2 e^{-2/x}. \quad 871. y = C_1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

872. $y = \frac{1}{2} e^x + C_1 \frac{e^x}{x} + C_2 \frac{e^{-x}}{x}$. **873.** $y = -\frac{2}{a^2} + C_1 \frac{e^{ax}}{x} + C_2 \times$
 $\times \frac{e^{-ax}}{x}$. **874.** $y = x \left(C_1 \cos \frac{k}{x} + C_2 \sin \frac{k}{x} \right)$. **875.** $y = x (C_1 e^{k/x} + C_2 e^{-k/x})$.
876. $y = e^{-x^2/2} \sqrt{x} \left(C_1 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln |x| \right) + C_2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln |x| \right) \right)$. **877.** $y =$
 $= e^{-x^2/2} (C_1 |x|^{(1+\sqrt{5})/2} + C_2 |x|^{(1-\sqrt{5})/2})$. **881.** $(xy')' + (x - n^2/x)y = 0$.
882. $(\sqrt{1-x^2} y')' + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$. **883.** $(xe^{-x} y')' + ne^{-x} y = 0$. **884.** $(e^{-x^2} y')' +$
 $+ 2ne^{-x^2} y = 0$. **885.** $(x^\gamma (x-1)^{\alpha+\beta+1-\gamma} y')' + \alpha\beta x^{\gamma-1} (x-1)^{\alpha+\beta-\gamma} y = 0$.
886. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$. **887.** $[x^2 y'' + xy' - y = 0$. **888.** $x^2 y'' - xy' + y = 0$.
889. $x^2 y'' - xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$. **890.** $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$. **891.** $y'' +$
 $+ \frac{2}{x} y' + y = 0$. **892.** $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$. **893.** $y = C_1 e^x + C_2 \sin x$.
894. $y = C_1 \cos x + C_2 e^x$. **895.** $y = C_1 \sqrt{1+x} + C_2 \sqrt{1-x}$. **896.** $y = x(C_1 +$
 $+ C_2 \int \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx)$. **897.** $y_1 = x^2 + 1$, $y = C_1 (x^2 + 1) + C_2 e^x$. **898.** $y_1 = x^3$, $y =$
 $= C_1 x^3 + C_2 e^x$. **899.** $y_1 = x^3 - x$, $y = C_1 (x^3 - x) + C_2 \left(6x^2 - 4 - 3(x^2 - x) \times \right.$
 $\times \ln \frac{x+1}{x-1} \left. \right)$. **900.** Частного решения в виде полинома нет; $y = C_1 \frac{1}{x} +$
 $+ C_2 \frac{1}{x^2}$. **901.** $y_1 = \frac{x^2}{2}$, $y = C_1 x^2 + C_2 \ln x$. **902.** $y = C_1 \operatorname{arctg} x + C_2 + x^2$,
 $y = 4 \operatorname{arctg} x + \pi - 1 + x^2$. **903.** $y = (x-1) \left(C_1 + C_2 \int \frac{e^{(x-1)^2/2}}{(x-1)^2} dx \right)$.
904. $y_1 = x$, $y_2 = x^2$; $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 e^x$. **905.** $n = 1$, $y_1 = x$, $y = C_1 x +$
 $+ C_2 \left(1 + \frac{x}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} \right)$; $n = 2$, $y_1 = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$, $y = C_1 (3x^2 - 1) +$
 $+ C_2 \left(8x + (3x^2 - 1) \ln \frac{x-1}{x+1} \right)$. **906.** $y = C_1 x + C_2 \sqrt{1-x^2}$. **907.** $y_1 =$
 $= -x + 1$, $y = (x-1) \left(C_1 + C_2 \int \frac{e^x dx}{x(x-1)^2} \right)$. **908.** $y_1 = -2x$, $y = x(C_1 +$
 $+ C_2 \int \frac{e^{x^2}}{x^2} dx)$. **909.** $y_1 = \frac{x}{1-x}$, $y = C_1 \frac{x}{1-x} + C_2 \left(\frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x} \ln |x| \right)$.
910. $y_1 = \frac{1}{1-x}$, $y = \frac{1}{1-x} (C_1 + C_2 x^2)$. **911.** При $\beta < 1/4$ $y = \sqrt{x(x-1)} \times$
 $\times (C_1 u^k + C_2 u^{-k})$, где $u = x/(x-1)$, $k = \sqrt{1/4 - \beta}$; при $\beta > 1/4$ $y =$
 $= \sqrt{x(x-1)} ((C_1 \cos(n \ln u) + C_2 \sin(n \ln u))$, где $u = x/(x-1)$, $n = \sqrt{\beta - 1/4}$;
 при $\beta = 1/4$ $y = \sqrt{x(x-1)} (C_1 + C_2 \ln u)$, где $u = x/(x-1)$. **912.** $y = C_1/x +$
 $+ C_2$. **913.** $y = C_1 (x \ln |x| - x) + x^4/12 + C_2 x + C_3$. **914.** $y = C_1 x^2 + C_2 \ln |x| +$
 $+ x^3/3 + C_3$. **915.** $y = C_1 \int \frac{dx}{\ln x} + C_2$. **916.** $y = e^{x^2/2} (C_1 + C_2 \int x e^{-x^2} dx)$.
917. $y = e^x \left(C_1 + C_2 \int \frac{e^{-2x}}{x} dx \right)$. **918.** $y'' - Bx^n y = 0$. **919.** $y = e^{-\int p(x) dx} \times$

$$\times (C_2 + C_1 \int e^{\int p(x) dx} dx). \quad 920. y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos^2 x. \quad 921. y = C_1 x + C_2 x^2 + 2x^3 \ln |x|. \quad 922. y = e^{-x^2} (C_2 + \int (C_1 + x^2) e^{x^2} dx). \quad 923. y = C_1 x \ln |x| + C_2 x + x^2. \quad 924. y = e^{x^2} (C_2 + C_1 \int e^{-x^2} dx). \quad 925. y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos^2 x. \quad 926. y_1 = Ai(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3k-1) \cdot 3k} + \dots, \\ y_2 = Bi(x) = x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots 3k(3k+1)} + \dots; \\ y = C_1 Ai(x) + C_2 Bi(x). \quad 927. y_1 = 1 - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{x^{12}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \dots, \\ y_2 = x - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} - \frac{x^{13}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13} + \dots; \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad 928. y_1 = 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{2}{5!} x^5 - \dots, \quad y_2 = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{2}{4!} x^4 - \frac{5}{5!} x^5 + \dots; \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad 929. y_1 = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^4}{4!} + \dots, \\ y_2 = x + \frac{12}{5!} x^5 + \dots; \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad 930. y_1 = 2x, \quad y_2 = x \int \frac{e^{x^2}}{x^2} dx; \\ y = x \left(C_1 + C_2 \int \frac{e^{x^2}}{x^2} dx \right). \quad 931. y_1 = x, \quad y_2 = 1 + \frac{1}{2} x \ln \frac{x-1}{x+1}; \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad 932. y_1 = e^x, \quad y_2 = x; \quad y = C_1 e^x + C_2 x. \quad 933. y_1 = x, \\ y_2 = \sqrt{1-x^2}; \quad y = C_1 x + C_2 \sqrt{1-x^2}. \quad 934. y_1 = 1, \quad y_2 = \arcsin x; \quad y = C_1 + C_2 \arcsin x. \quad 935. y_1 = \frac{\sin x}{x}, \quad y_2 = \frac{\cos x}{x}. \quad 936. y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad y_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}. \quad 937. y_1 = \frac{x}{1-x}, \quad y_2 = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x} \ln x. \quad 939. y_1 = \frac{1}{1-x}, \quad y_2 = \frac{1}{1-x} \ln |x|. \quad 940. y_1 = \frac{x^2}{1-x}, \quad y_2 = \frac{1}{1-x}. \quad 941. y_1 = 1-x, \quad y_2 = \frac{-2x+1}{x} + 2(x-1) \ln \frac{x}{x-1}. \quad 942. y_1 = \frac{1}{x} \ln(1-x), \quad y_2 = \frac{1}{x}. \quad 943. y_1 = e^{-x}, \\ y_2 = e^{-x} \int \frac{e^x}{x} dx; \quad y = e^{-x} \left(C_1 + C_2 \int \frac{e^x}{x} dx \right). \quad 945. y = C_1 P_n(x) + C_2 \left(Q_{n-1}(x) + \frac{1}{2} P_n(x) \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right), \text{ где } P_n(x) \text{ — полином Лежандра; } Q_{n-1}(x) \text{ — полином не выше } (n-1)\text{-й степени, коэффициенты которого можно определить, например, из условия } Q'_{n-1} P_n - Q_{n-1} P'_n = \frac{1 - P_n^2}{x^2 - 1}. \quad 947. t = kx, \quad t^2 y'' + t y' + (t^2 - n^2) y = 0. \quad 948. y = xz, \quad x^2 z'' + x z' + (x^2 - (m^2 + 1)) z = 0. \quad 949. y = x^n z. \quad 950. y_1 = 1 - x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k!)^2}, \quad y_2 = \frac{1}{2} y_1 \ln x + x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \times \\ \times \frac{1 + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{k}{(k!)^2}}{k^2} x^k; \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad 951. y_1 = e^x.$$

955. $y_1 = x \sin(1/x)$, $y_2 = x \cos(1/x)$. 956. $y_1 = 1 - 1/x$, $y_2 = x - 1 - 1/x + 2(1 - 1/x) \ln(x - 1)$. 966. Уравнение (17) после замены аргумента $x = t + \omega$ сохраняет свой вид $d^2y/dt^2 + p(t)y = 0$ (почему?), и его решение $y_3(t)$, определяемое условиями: $y_3(t_0) = y_0$, $y'_3(t_0) = y'_0$, где $t_0 = x_0$, есть $y_1(t)$. При этом $y_1(t) = y_1(x - t\omega)$. С другой стороны, функция $y_2(x)$ после той же замены превращается в $y_3(t)$, откуда $y_2(x) = y_1(x - t\omega)$ и, следовательно, $y_2(x + t\omega) = y_1(x)$. 967. Пусть $y_1(x)$ — решение уравнения (17), такое, что $y_1(x_1) = 0$, $y_1(x_2) = 0$, $x_1 < x_2$. Пусть также $y'_1(x_1) = y'_0$. Возьмем $x_3 = x_1 + m_1\omega$, где m_1 такое, что $x_3 > x_2$. Решение $y_3(x)$, определенное условиями $y_3(x_3) = 0$, $y'_3(x_3) = y'_0$, будет иметь второй нуль $x_4 = x_2 + m_1\omega > x_3$, так как $y_3(x + m_1\omega) = y_1(x)$ (см. предыдущую задачу). Далее строим решение $y_4(x)$, обращающееся в нуль при $x = x_5 = x_1 + m_2\omega > x_4$. Оно имеет нуль $x_6 = x_2 + m_2\omega > x_5$ и т. д. По теореме Штурма, решение $y_1(x)$ и всякое другое должны обращаться в нуль на отрезках $[x_3, x_4]$, $[x_5, x_6]$ и т. д.

Глава V

1061. $y = -\frac{1}{x^2 + C_1}$, $z = x(C_2 - \ln|x_1|)$. 1062. $e^y - e^x = C_1$, $x = z \left(C_2 - \frac{1}{2} z \right)$. 1063. $y = C_1(1 + x^2)$, $z = \frac{C_2}{x} + \frac{C_1}{2}x + \frac{C_1}{4}x^3 + \frac{x^2}{3}$. 1064. $y = C_1x^2 + \frac{1}{4C_1}$, $\frac{z^3}{3} - xz - \frac{C_1}{3}x^3 - \frac{1}{4C_1}x = C_2$; $y = x$, $\frac{z^3}{3} - xz - \frac{x^2}{2} = C$; $y = -x$, $\frac{x^3}{3} - xz + \frac{x^2}{2} = C$. 1067. $y = C_2e^{C_1x}$, $z = C_1C_2e^{C_1x}$. 1068. $y = C_1 + C_2e^{-4x}$, $z = -C_1 - 5C_2e^{-4x}$. 1069. $y = C_1x + C_2x^2$, $z = C_1(1 - x) + C_2(2x - x^2)$. 1070. $y/x = C_1$, $z/x = C_2$. 1071. $y/x = C_1$, $z/x = C_2$, $u/x^m = C_3$. 1072. $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C_1$, $z - \sqrt{x} = C_2$. 1073. $y = C_1$, $z/x = C_2$. 1074. $y = C_1$, $ze^{-x/y} = C_2$. 1075. $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$, $lx + my + nz = C_2$. 1076. $ze^{-x} + y = C_1$, $ze^{-y} + x = C_2$. 1077. $y = e^x$, $z = e^x - e^{2x}$. 1078. $y = C_1x + C_2x^2 + C_3/x$, $z = -C_1 + 2C_2(1 - x) + C_3(2/x^3 + 1/x^2)$. 1079. $\psi_1 = xy$, $\psi_2 = z/x$. 1080. $\psi_1 = \sin x - \sin y$, $\psi_2 = \sin x - z$. 1081. $\psi_1 = y/x$, $\psi_2 = z - x - y$. 1082. $\psi_1 = y/x$, $\psi_2 = z$. 1083. $\psi_1 = z$, $\psi_2 = \frac{(x+z)y}{y+z}$. 1084. $\psi_1 = (5 \cos 5x - \sin 5x)y - z \sin 5x$, $\psi_2 = (5 \sin 5x + \cos 5x)y + z \cos 5x$. 1085. $y'_1 = y_2$, $y'_2 = -y_2/x - y_1$, где $y_1 = y$, $y_2 = y'$. 1086. $dx_1/dt = x_2$, $dx_2/dt = -k^2x_1$, где $x_1 = x$, $x_2 = dx/dt$. 1087. $y'_1 = y_2$, $y'_2 = y_3$, $y'_3 = y_4$, где $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$. 1088. $y'_1 = y_2$, $y'_2 = y_3$, $y'_3 = y_4$, $y'_4 = -x^2y_1$, где $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, $y_4 = y'''$. 1089. $y'_1 = y_2$, $y'_2 = y_3$, $y'_3 = \frac{2}{x^3}y_1$, где $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = z$. 1090. $y'_1 = y_2$, $y'_2 = y_3$, $y'_3 = y_4$, $y'_4 = -y_1$, где $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = z$, $y_4 = z'$. 1091. $x = \frac{C_2 \cos t - C_1 \sin t - \beta(C_1^2 + C_2^2)}{(\cos t - \alpha C_1 - \beta C_2)^2 + (\sin t - \alpha C_2 + \beta C_1)^2}$, $y = \frac{-C_2 \sin t - C_1 \cos t + \alpha(C_1^2 + C_2^2)}{(\cos t - \alpha C_1 - \beta C_2)^2 + (\sin t - \alpha C_2 + \beta C_1)^2}$; положение равновесия $x = 0$,

$\rho = 0$ — центр. 1092. $x = 1/\sqrt{t}$, $y = 0$. 1093. $x = -1/t$, $y = 0$. 1094. $x = t/(1+t^2)$, $y = 1/(1+t^2)$. 1095. $x = \ln(t+e)$, $y = 0$. 1096. $u' = u^2 - v^2 + q(x)$, $v' = 2uv$. 1097. Если $y(x_1) = m_1$ — вещественное число, то $y(x)$ — вещественное решение уравнения (21) как при $x < x_1$, так и при $x > x_1$ и не может равняться комплексному числу $m + in$ (при $x = x_0$). 1101. $y = e^x$, $z = x^2$. 1102. $y = \sin x$, $z = x$. 1104. $y = 1/(2-x)$, $z = x$. 1105. $y = 1/(1-x)$, $z = x$. 1106. $y = e^x$, $z = e^{-x}$. 1109. $y = e^x$. 1110. $y = \sin x$. 1116. $y = \sqrt{x}$, $z = -1/(2\sqrt{x})$.

Глава VI

1117. $y = C_1 e^{-2x}$, $z = C_2 e^x$. 1118. $x = C_1$, $y = C_2 e^{-t}$. 1119. $y = C_1 e^{2t}$, $x = \frac{C_1}{2} e^{2t} + C_2$. 1120. $y = C_1 x$, $z = C_2 e^x - C_1(x+1)$. 1121. $z = C_1 e^{-t}$, $y = C_2 e^{2t}$, $x = C_3 e^t - 2C_2 e^{2t}$. 1122. $z = C_1 e^{2t}$, $y = e^{2t}(C_2 + C_1 t)$, $x = e^{2t}\left(C_3 + C_2 t + \frac{C_1}{2} t^2\right)$. 1123. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$. 1124. $x = 1 + C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$. 1125. $x = e^{3t}(C_1 + C_2 t)$, $y = e^{3t}(C_1 - C_2 + C_2 t)$. 1126. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, $z = -C_1 e^x - \frac{3C_2}{2} e^{2x}$. 1127. $x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$, $y = e^{2t} \times \times (C_1 \sin t - C_2 \cos t)$. 1128. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $y = \frac{1}{2}((C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t)$. 1129. $z = C_1 e^{-6t}$, $x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$, $y = \frac{C_1}{6} e^{-6t} + \frac{C_2}{2} e^{2t} + \frac{C_3}{3} e^{3t}$. 1130. $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + x$, $z = e^{3x}(C_1 + C_2 x) - C_2 e^{3x} - x$. 1131. $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-7x} + 7e^x + e^{-x}$, $z = \frac{C_1}{2} e^{-4x} - C_2 e^{-7x} + e^x + 2e^{-x}$. 1132. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t \cos t$, $y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + t \sin t$. 1133. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$, $z = C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{3x}$; $y = e^{2x} - e^{3x}$, $z = e^{2x} - 2e^{3x}$. 1134. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, $z = 2C_1 e^x + 5C_2 e^{-2x}$; $y = e^{-2x}$, $z = 5e^{-2x}$. 1135. $y = C_1 + C_2 e^{5x}$, $z = C_1 - 4C_2 e^{5x}$. 1136. $y = C_1 + C_2 e^{-3x}$, $z = -2C_1 - 3C_2 e^{-x}$. 1137. $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$, $z = e^{2x}(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x)$. 1138. $y = 2e^{-2x}(C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x)$, $z = e^{-2x}((3C_1 - \sqrt{3}C_2) \cos \sqrt{3}x + (\sqrt{3}C_1 + 3C_2) \sin \sqrt{3}x)$. 1139. $x = 5C_1 \cos 2t + 5C_2 \sin 2t$, $y = (-4C_1 + 2C_2) \cos 2t - (2C_1 + 4C_2) \sin 2t$. 1140. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$, $z = (-C_1 + 3C_2) \cos 3x - (3C_1 + C_2) \sin 3x$. 1141. $x = -2C_1 e^t - 8C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{3t}$, $y = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$, $z = 2C_1 e^t + 7C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}$. 1142. $x = 2C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{2t}$, $y = 3C_1 - 2C_2 e^{2t}$, $z = C_1 + C_2 e^t + 2C_3 e^{2t}$. 1143. $x = (C_2 + C_3) \cos t + (-C_2 + C_3) \sin t$, $y = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t$, $z = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t$; $x = \cos t$, $y = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$, $z = \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$. 1144. $x = C_1 e^{-t} + (7C_2 + 11C_3) \cos t + (-11C_2 + 7C_3) \sin t$, $y = -2C_1 e^{-t} + (15C_2 + 9C_3) \cos t + (-9C_2 + 15C_3) \sin t$, $z = 2C_1 e^{-t} + (-2C_2 + 8C_3) \cos t + (-8C_2 - 2C_3) \sin t$. 1145. $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$, $z = e^{-2x} \times \times (-C_1 + C_2(1-x))$. 1146. $x = e^{-t}(C_1 + C_2 t)$, $y = e^{-t}(2C_1 + C_2(2t-1))$. 1147. $x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$, $y = -2C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^t - 3C_3 e^t$, $z = 2C_1 e^{-2t} + C_3 e^t$. 1148. $x = C_1 e^{-t} + (C_2 t + C_2 + C_3) e^t$, $y = -2C_1 e^{-t} - 3C_2 e^t$, $z = 2C_1 e^{-t} + (C_2 t + C_3) e^t$. 1149. $x = C_1 + C_3 e^{-t}$, $y = 3C_1 - 3C_2 - 2C_3 e^{-t}$, $z = C_2 + 2C_3 e^{-t}$. 1150. $x = C_1 +$

$+ C_2(t+1) + C_3e^{-t}$, $y = -3C_2 - 2C_3e^{-t}$, $z = C_1 + C_2t + 2C_3e^{-t}$. 1151. $y_1 = x^2 + C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$, $y_2 = x + 2 + C_1e^{2x} + 2C_2e^{3x}$, $y_1 = x^2$, $y_2 = x + 2$. 1152. $y = 2e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{-x}$, $z = 9e^{2x} + 3C_1e^x + C_2e^{-x}$. 1153. $y = xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x}$, $z = (x+1)e^x + C_1e^x + 3C_2e^{-x}$. 1154. $x = 2\cos 2t + 3\sin 2t + 2e^{-t/2} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$, $y = 7\sin 2t + e^{-t/2} \left((3C_1 - \sqrt{3}C_2) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + (\sqrt{3}C_1 + 3C_2) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$. 1155. $x = -t \cos t + C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $y = t(\cos t + \sin t) - (C_1 - C_2) \cos t - (C_1 + C_2) \sin t$; $x = (-t+1) \cos t - \sin t$, $y = (t-2) \cos t + t \sin t$. 1157. $y_1 = e^{-x}$, $z_1 = 2e^{-x}$; $y = e^{-x} + C_1e^x + C_2e^{2x}$, $z = 2e^{-x} + 2C_1e^x + 3C_2e^{2x}$.

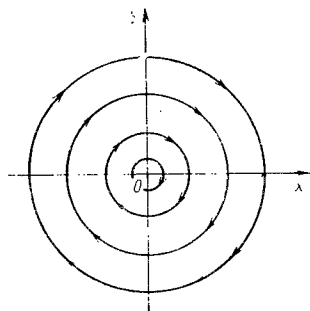


Рис. 65

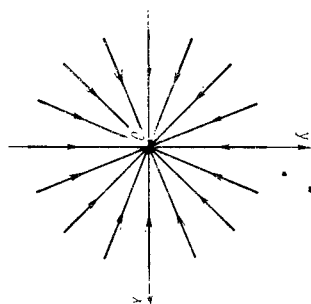


Рис. 66

1158. $y_1 = x + 2$, $z_1 = -2x + 1$; $y = x + 2 + C_1e^x + C_2e^{3x}$, $z = -2x + 1 - C_1e^x + C_2e^{3x}$. 1159. $y_1 = \sin x$, $z_1 = \sin x - \cos x$; $y = \sin x + C_1e^x + C_2e^{-x}$, $z = \sin x - \cos x + C_1e^x + 3C_2e^{-x}$. 1160. $(x+y)e^{-t} = C_1$, $(x-y)e^t = C_2$. 1161. $(x-y)e^{-3t} = C_1$, $(3x-y)e^{-5t} = C_2$. 1162. $(x+3y)e^{-5t} = C_1$, $((x+3y)t - y)e^{-5t} = C_2$. 1163. $y + z = C_1e^{9x} - \frac{1}{8}e^x - \frac{1}{9}y - z = C_2e^x + xe^x + 1$. 1164. $y = 2\sin t + C_1t + C_2$, $x = -3\sin t - 2\cos t + 2C_1t - C_1 - 2C_2$. 1165. $\psi_1 = y - 2x$, $\psi_2 = ye^{-2t}$. 1166. $\psi_1 = (y-z)e^{-3x}$, $\psi_2 = (z-xy+xz)e^{-3x}$. 1167. $\psi_1 = (z\sin x + y\cos x)e^{-2x}$, $\psi_2 = (y\sin x - z\cos x)e^{-2x}$. 1168. $x = x_0 \cos t + y_0 \sin t$, $y = -x_0 \sin t + y_0 \cos t$; траектории: $x^2 + y^2 = C^2$ или $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ и $x=0$, $y=0$; $x=0$, $y=0$ устойчиво (рис. 65). 1169. $x = x_0e^{-t}$, $y = y_0e^t$; траектории: $y = C/x$, $x=0$ ($y \neq 0$), $y=0$ ($x \neq 0$) и $x=0$, $y=0$; $x=0$, $y=0$ неустойчиво (условно устойчиво). 1170. $x = x_0e^{-2t}$, $y = y_0e^{-2t}$; $y = Cx$ ($x \neq 0$), $x=0$ ($y \neq 0$) и $x=0$, $y=0$; $x=0$, $y=0$ асимптотически устойчиво (рис. 66). 1171. $x = x_0e^t$, $y = y_0e^t$; $y = Cx$ ($x \neq 0$), $x=0$ ($y \neq 0$) и $x=0$, $y=0$; $x=0$, $y=0$ неустойчиво (рис. 67). 1172. $x = x_0e^{-t}$, $y = y_0e^{-2t}$; $y = Cx^2$ ($x \neq 0$), $x=0$ ($y \neq 0$) и $x=0$, $y=0$; $x=0$, $y=0$ асимптотически устойчиво. 1173. $x = x_0e^t$, $y = y_0e^{2t}$; $y = Cx^2$ ($x \neq 0$), $x=0$ ($y \neq 0$) и $x=0$, $y=0$; $x=0$, $y=0$ неустойчиво. 1174. $x = x_0e^{-2t}$, $y = y_0e^{-t}$; $y = C|x|^{1/2}$ ($x \neq 0$), $x=0$ ($y \neq 0$) и $x=0$, $y=0$; $x=0$, $y=0$ асимптотически устойчиво. 1175. $x = x_0e^{-t}$, $y = (x_0t + y_0)e^{-t}$; $y = x(-\ln|x| + C)$ ($x \neq 0$), $x=0$ ($y \neq 0$) и $x=0$, $y=0$; $x=0$, $y=0$ асимптотически устойчиво (см. рис. 68, $y = x$ ($x \neq 0$) — линия экстремумов). 1176. $x = (y_0t + x_0)e^{2t}$; $y = y_0e^{2t}$;

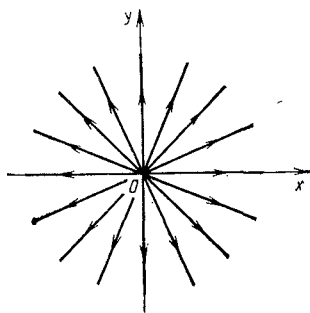


Рис. 67

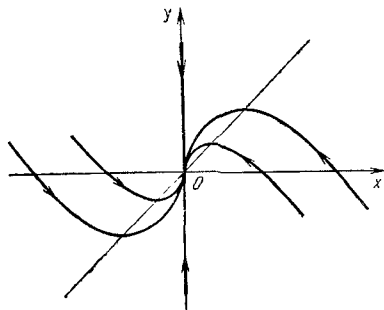


Рис. 68

$x = y \left(-\frac{1}{2} \ln |y| + C \right)$ ($y \neq 0$), $y = 0$ ($x \neq 0$) и $x = 0$, $y = 0$; $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ неустойчиво (рис. 69). 1177. $x = e^{-t} (x_0 \cos t + (y_0 + 2x_0) \sin t)$, $y = e^{-t} (y_0 \cos t - (5x_0 + 2y_0) \sin t)$; $r = Ce^t$ ($r = \sqrt{u^2 + v^2}$, $\varphi = \arctg(v/u)$, где $u = x$, $v = y + 2x$) и $x = 0$, $y = 0$; $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ асимптотически устойчиво. 1178. $x = x_0 e^{-2t}$, $y = y_0$; $y = C$ ($x \neq 0$), точки оси Oy : $x = 0$, $y = y_0$; $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчиво (рис. 70). 1179. $x = x_0$, $y = y_0 e^{2t}$; $x = C$ ($y \neq 0$), точки оси Ox : $y = 0$, $x = x_0$; $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ неустойчиво. 1180. $y = x_0 \cos t + (x_0 - 2y_0) \sin t$, $y = y_0 \cos t + (x_0 - y_0) \sin t$; $x^2 - 2xy + 2y^2 = C^2$; $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчиво. 1181. Неустойчиво. 1182. Неустойчиво. 1183. Устойчиво. 1184. Неустойчиво. 1185. Неустойчиво. 1186. Устойчиво.

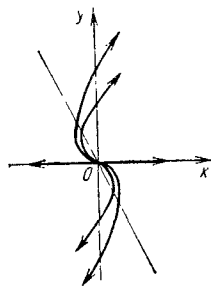


Рис. 69

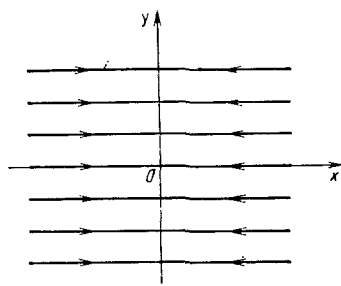


Рис. 70

1187. Асимптотически устойчиво. 1188. Асимптотически устойчиво. 1189. Неустойчиво. 1190. Неустойчиво. 1191. Устойчиво. 1192. Асимптотически устойчиво.

1193. Неустойчиво. 1194. $y = \frac{1}{x^2} (C_1 + C_2 (\ln x + 1))$, $z = -\frac{1}{x^2} (C_1 + C_2 \ln x)$.

1195. $y = C_1 e^{-1/x} + 2C_2 e^{-2/x}$, $z = -(C_1 e^{-1/x} + 3C_2 e^{-2/x})$. 1196. $y = e^{2\sqrt{x}} \times (C_1 \cos \sqrt{x} + C_2 \sin \sqrt{x})$, $z = e^{2\sqrt{x}} (C_1 \sin \sqrt{x} - C_2 \cos \sqrt{x})$. 1197. $y_1 = x(C_1 + 2 \ln x)$, $y_2 = C_2 x$, $y_3 = C_3/x$. 1199. $y_1 = e^{-x}$, $z_1 = 0$; $y_2 = 0$, $z_2 = e^x$. 1200. $y_1 = 2 - e^{-x}$, $z_1 = 2 - 2e^{-x}$; $y_2 = -1 + e^{-x}$, $z_2 = -1 + 2e^{-x}$. 1201. $y_1 = e^{2x}$, $z_1 = 0$; $y_2 = 0$, $z_2 = e^{2x}$. 1202. $y_1 = e^{2x}$, $z_1 = x e^{2x}$; $y_2 = 0$, $z_2 = e^{2x}$. 1203. $y_1 = \frac{1}{2} (1 + e^{2x})$, $z_1 = \frac{1}{2} (1 - e^{2x})$; $y_2 = \frac{1}{2} (1 - e^{2x})$, $z_2 = \frac{1}{2} (1 + e^{2x})$. 1204. $y_1 =$

$= \cos x$, $z_1 = -\sin x$; $y_2 = \sin x$, $z_2 = \cos x$. **1205.** $y_1 = e^{-x}(\cos x + 2\sin x)$, $z_1 = -5\sin x$; $y_2 = e^{-x}\sin x$, $z_2 = e^{-x}(\cos x - 2\sin x)$. **1206.** $x_1 = e^{-3t}$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$; $x_2 = te^{-3t}$, $y_2 = e^{-3t}$, $z_2 = 0$; $x_3 = 0$, $y_3 = 0$, $z_3 = e^t$. **1207.** $y'_1 = 3y_1$, $y'_2 = 2y_2$. **1208.** $y'_1 = 3y_1$, $y'_2 = 3y_2$. **1209.** $y'_1 = 3y_1 + y_2$, $y'_2 = 3y_2$. **1210.** $y'_1 =$

$= 2y_2$, $y'_2 = -2y_1$. **1211.** $y'_1 = \frac{x}{1+x^2}y_1 + \frac{1}{1+x^2}y_2$, $y'_2 = -\frac{1}{1+x^2}y_1 + \frac{x}{1+x^2}y_2$. **1212.** $y'_1 = \frac{x}{x^2-1}y_1 - \frac{1}{x^2-1}y_2$, $y'_2 = -\frac{1}{x^2-1}y_1 + \frac{x}{x^2-1}y_2$.

1213. $x = C_1 e^{-t} + e^{t/2} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$, $y = C_1 e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t/2} \times$
 $\times \left((\sqrt{3}C_3 - C_2) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - (\sqrt{3}C_2 + C_3) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right)$. **1214.** $x = C_1 e^t + C_2 e^t +$

$+ C_3 \cos t + C_4 \sin t$, $y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t$; $x = \frac{3}{4}(e^t + e^{-t}) -$
 $-\frac{1}{2} \cos t = \frac{3}{2} \operatorname{ch} t - \frac{1}{2} \cos t$; $y = \frac{3}{4}(e^t + e^{-t}) + \frac{1}{2} \cos t = \frac{3}{2} \operatorname{ch} t + \frac{1}{2} \cos t$.

1215. $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{9}$, $z = \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$. **1216.** $x + y + z = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$, $x - y =$

$= C_3 \cos \sqrt{2}t + C_4 \sin \sqrt{2}t$, $y - z = C_5 \cos \sqrt{2}t + C_6 \sin \sqrt{2}t$. **1217.** $y = C_1(1 +$
 $+ x^2) + C_2 x$, $z = C_1 x + C_2$. **1218.** $y = C_1(1 + x^4) + C_2 x^2$, $z = C_1 x^2 + C_2$. **1219.** $y =$
 $= C_1/(1-x) + C_2 x$, $z = C_1 x + C_2(1-x)$. **1220.** $\frac{dy}{dx} = YP$, $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $Y =$

$= \begin{bmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{3x} \end{bmatrix}$. **1221.** $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{bmatrix}$. **1222.** $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

$Y = \begin{bmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{bmatrix}$. **1223.** $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} e^{2x} & 0 \\ xe^{2x} & e^{2x} \end{bmatrix}$. **1224.** $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

$Y = \begin{bmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{bmatrix}$. **1225.** $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{bmatrix}$.

1226. $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ xe^{2x} & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{bmatrix}$. **1227.** $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

$Y = \begin{bmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{bmatrix}$. **1228.** $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ xe^{2x} & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{bmatrix}$.

1229. $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ xe^{2x} & e^{2x} & 0 \\ \frac{x^2}{2}e^{2x} & xe^{2x} & e^{2x} \end{bmatrix}$. **1230.** $\frac{dY}{dx} = YA$,

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = SAS^{-1}, S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \frac{dZ}{dx} = ZB;$
 $Z = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{bmatrix}; Y = ZS, Y = \begin{bmatrix} e^x & -e^x \\ -2e^{2x} & 3e^{2x} \end{bmatrix}; y_1 = C_1 e^x - 2C_2 e^{2x}, y_2 =$
 $= -C_1 e^x + 3C_2 e^{2x}. 1231.* y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, y_2 = C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{3x}. 1232. y_1 =$
 $= C_1 + C_2 e^{5x}, y_2 = C_1 - 4C_2 e^{5x}. 1233. y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 (x+1) e^{3x}, y_2 = C_1 e^{3x} +$
 $+ C_2 x e^{3x}. 1234. y_1 = C_1 + C_2 x, y_2 = 2C_1 + C_2 (2x-1). 1235. y_1 = -2C_1 e^x -$
 $- 8C_2 e^{2x} - 3C_3 e^{3x}, y_2 = C_1 e^x + 3C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}, y_3 = 2C_1 e^x + 7C_2 e^{2x} + 3C_3 e^{3x}.$
 $1236. y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + C_3 e^x, y_2 = -2C_1 e^{-2x} + 3C_2 e^x, y_3 = 2C_1 e^{-2x} + C_3 e^x.$
 $1237. y_1 = C_1 e^x + C_2 (x+1) e^x + C_3 e^{-x}, y_2 = 3C_2 e^x - 2C_3 e^{-x}, y_3 = C_1 e^x + C_2 x e^x +$
 $+ 2C_2 e^{-x}. 1242. y_1 = e^{-2x}, z_1 = -e^{-2x}; y_2 = (x+1) e^{-2x}, z_2 = -x e^{-2x}. 1243. y =$
 $= 1/(1+x), z = x^2. 1244. y = e^x, z = 1/(1-x). 1245. y = e^x, z = e^{-x}. 1246. y =$
 $= e^x, z = x^3. 1248. y = e^x, z = \sin x. 1250. y = x, z = 1/(2-x). 1258. y = e^{x^2/2}.$

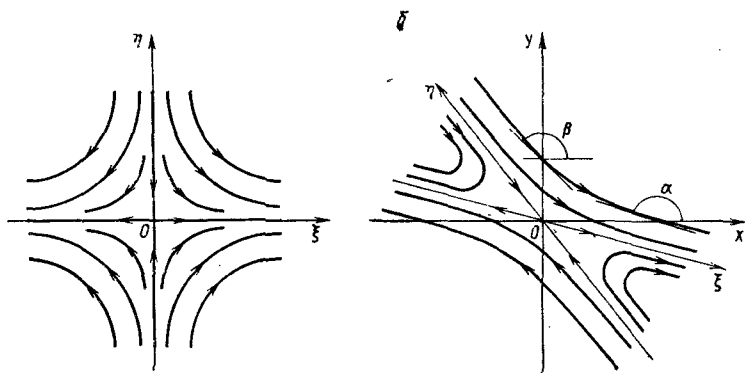


Рис. 71

1283. Решение с. Соответствующая автономная система $dx/dt = 3x + 4y, dy/dt = -x - 2y$ имеет характеристические числа $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$. Следовательно, $x = 0, y = 0$ — седло, $x \equiv 0, y \equiv 0$ условно устойчиво. Канонический вид данного дифференциального уравнения: $d\eta/d\xi = -\eta/(2\xi)$. Его интегральные кривые $\eta = C/\sqrt{|\xi|}$ ($\xi \neq 0$), $\xi = 0$ ($\eta \neq 0$) имеют вид, указанный на рис. 71, а. Точки $\xi = 0, \eta = 0$ — седло, $\eta = 0$ ($\xi \neq 0$), $\xi = 0$ ($\eta \neq 0$) — сепаратрисы седла. Нулевое решение $\xi = 0, \eta \equiv 0$ соответствующей (канонической) автономной системы $d\xi/dt = 2\xi, d\eta/dt = -\eta$ условно устойчиво (стрелки на рис. 71, а указывают направления движения при $t \rightarrow +\infty$). Для построения схемы расположения интегральных кривых данного уравнения в окрестности особой точки $x = 0, y = 0$ найдем неособенное линейное преобразование, приводящее это уравнение (и соответствующую ему автономную систему) к каноническому виду. Записывая искомое преобразование в векторной форме, имеем: $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, D(S) \neq 0$, где S — матрица, приводящая матрицу $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ к каноническому виду $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, так что

* В задачах 1231—1237 ответы даны с точностью до неособенной постоянной матрицы C , ибо если Y_1 — интегральная матрица, то CY_1 — тоже интегральная матрица.

$$SAS^{-1} = B. \left(\text{В самом деле, } \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = CA \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = CAC^{-1} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, CAC^{-1} = B, C = S. \right)$$

Из уравнения $SA = BS$ находим $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Поэтому $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, откуда $\xi = x + y$, $\eta = x + 4y$ — искомое преобразование. Сепаратрисы седла $x = 0$, $y = 0$; $y = -x$ ($x \neq 0$), $v = -\frac{1}{4}x$ ($x \neq 0$). Расположение интегральных кривых

данного уравнения в окрестности особой точки $x = 0$, $y = 0$ указано на рис. 71, б (стрелки указывают направления движения при $t \rightarrow +\infty$; при определении направления движения принимается во внимание поле скоростей, задаваемое автономной системой, соответствующей данному уравнению). 1284. Узел, $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\eta}{\xi}$; $x \equiv 0$,

$y \equiv 0$ вполне неустойчиво. 1285. Седло, $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{-\xi}$; $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ условно устойчиво.

1286. Фокус, $\frac{dv}{du} = \frac{u - 2v}{-2u - v}$; $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

1287. Центр, $\frac{dv}{du} = \frac{u}{-v}$; $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчиво (неасимптотически). 1288. Вы-

рожденный узел, $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + 3\eta}{3\xi}$; $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ вполне неустойчиво.

Глава VII

1290. $u = F(y, x^y/z)$; $u = x^y/z$. 1291. $u = F(e^{-2x}(y+z), e^{-x}(3y+2z))$. 1292. $u = F(y^2 - z^2, 2x + (z - y)^2)$; $u = 2(y(y-z) + x)$. 1293. $u = F(lx + my + nz, x^2 + y^2 + z^2)$. 1294. $z = F\left(\frac{y^2}{1+x^2}\right)$; $z = \frac{y}{1+x^2}$. 1295. $u = F(y, \ln z - x/y)$; $u = \ln z - x/y$. 1296. $u = F(z/y, y + y^3/x^2)$. 1297. $u = F(y/x, z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. 1298. $u = F(x^2 + y^2 + z^2, yz/x)$. 1299. $\Phi(e^{-2x}(z \sin x + y \cos x), e^{-2x}(y \sin x - z \cos x)) = 0$. 1300. $\Phi(z, x^2 - y^2z) = 0$; $z = x^2/y^2$. 1301. $\Phi(y, z/x) = 0$ или $z = xf(y)$; $z = xy$. 1302. $\Phi(y, ze^{-x/y}) = 0$ или $z = e^{x/y}f(y)$. 1303. $\Phi(z - \sqrt{x}, \sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$ или $z = \sqrt{x} + f(\sqrt{x} - \sqrt{y})$. 1304. $\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x}\right) = 0$ или $u = xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$; $u = \frac{1}{2}(y+z)$. 1305. $\Phi(z, xe^{-y/z}) = 0$, $z = \frac{y}{\ln x - 1}$. 1306. $\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x^2}\right) = 0$ или $z = x^2f\left(\frac{y}{x}\right)$; $z = xy$. 1307. $\Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$. 1308. $z = Ce^{xy}$. 1309. $z = Ce^{\sin(xy)}$. 1310. $z = -1/(x + y^2 + C)$. 1311. $z = e^{x+y}(y+C)$. 1312. $z = Ce^{y/x}$. 1313. $z = e^{xy}(y+C)$. 1314. $z = x^2(y + \ln x - x + C)$. 1315. $z = ax + by + a^2$. 1316. $z = ax + by + ab$. 1317. $z^2a^2 = x + ay + b$. 1333. $z = Cx^2y^3$. 1334. $z = (y+C)(x-y^2)$. 1335. $z = ax + by - a^2b$.

Глава VIII

1344. $y^2 = 1 + Ce^{-x}/x^2$, $y = \pm 1$ ($x \neq 0$), $x = 0$ ($y^2 \neq 1$). 1345. $xy = z$. 1346. $y^2 = xz$. 1347. $y = xz$, $f(x)z' = z^2 - 1$. 1348. $y = xz$, $z' = x^{\lambda-1}f(z)$. 1349. $(y-b)/(x-a) = z$, $(x-a)z' = f(x)g(z)$. 1350. $xy = z$, $z' = \frac{z}{x}(1 + zf(z))$. 1351. $xy = z$, $z' = x\varphi(x)f(z)$. 1352. $f(0) = 0$, $f'(x) = C(1 + f^2(x))$, $C \equiv f'(0)$; $f(x) = \operatorname{tg} Cx$. 1353. $f(x) = e^{Cx}$. 1354. $(y-b)/(x-a) = C$. 1356. $y = Ce^{-2x} + \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x$ при $y < \sin x$, $y = Ce^{-x}$ при $y \geq \sin x$. 1357. $y_1 = \varphi(x) - 1$, $y = \varphi(x) - 1 + Ce^{-\varphi(x)}$. 1358. $y_1 = \sin x - 1$, $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$. 1359. $\varphi(y) = z$, $A(x)z' + B(x)z + C(x) = 0$. 1360. $y^m = z$, $z' + mpz = mq$. 1375. $y = -\frac{1}{x} \times \frac{2}{a(\ln x)^2 + C}$, $y = 0$ ($x \neq 0$). 1376. $y - \varphi(x) = z$. 1377. $a^4 + 2a^2xy + (a^2 - b^2)x^2 = C(a^2y - b^2x)^2$. 1378. $-1 + x\sqrt{xy} + \frac{3}{2}(x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{3}{2} \times \sqrt{xy}(x+y) = C(x+y)^2$. 1379. $1 + x - y = C\sqrt{x^2 + y^2}$. 1380. $x - 1 = C(y + 2)$. 1381. $5x(y - x - 1) - 8(y - x) - 4 = C(y - x + 1)^2$. 1382. $y = C \sin^{2k+1} x$. 1383. $y = Ce^{x^2}$. 1384. $2xy^2 - x^2 + y^4 = C$. 1385. $\mu = \cos x \cdot \cos y$, $x^2 \sin y - y^2 \sin x = C$. 1390. Частное. 1391. Частное. 1392. Особое. 1393. Не гарантируется: $y' = -x^3\sqrt{y}$, $y(0) = 0$. 1396. $t = \varphi(x)$; $y = ty'_t + f(y'_t)$. 1397. Решение. Область задания уравнения: $y \leq 1$ (см. рис. 72); $y' \geq 0$, $y' + y = 1$, $y = Ce^{-x} + 1$, $C \leq 0$; $y' < 0$, $y' - y = -1$, $y = Ce^x + 1$, $C < 0$; $y = 1$ — частное решение — асимптота семейства интегральных кривых. 1398. Решение. Имеем $\operatorname{sign} y' = -\operatorname{sign} y$ (см. рис. 73); $y' \geq 0$, $y'^2 = -2y$, $y = -2(x+C)^2$, $x \leq -C$; $y' < 0$, $y'^2 = 2y$, $y = 2(x+C)^2$, $x < C$; $y = 0$ — особое решение — огибающая семейства интегральных кривых. 1399. Решение. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y' = y + x$, $y = Ce^x - x - 1$; $x < 0$, $y \geq 0$, $y' = y - x$, $y = Ce^x + x + 1$; $x < 0$, $y < 0$, $y' = -y - x$, $y = Ce^{-x} - x + 1$; $x \geq 0$, $y < 0$, $y' = -y + x$, $y = Ce^{-x} + x - 1$. 1401. $x - y > 0$, $-2(\sqrt{x-y} + \ln|1 - \sqrt{x-y}|) = x + C$; $x - y < 0$, $2(\sqrt{y-x} - \ln|1 + \sqrt{y-x}|) = -x + C$; $x - y = 0$, $y = x$ — не решение. 1415. $y = zx$; $z'' = F(z)$. 1421. $y = e^{A(x-x_0)}y_0 +$

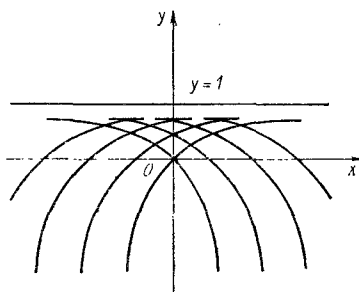


Рис. 72

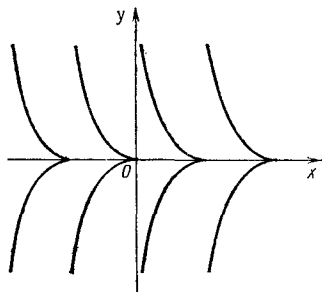


Рис. 73

$+\int_{x_0}^x e^{A(x-t)} f(t) dt$. 1428. Центр; $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчиво. 1429. Фокус, $x \equiv 0$, $y \equiv 0$

асимптотически устойчиво. 1430. Фокус; $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

1431. Центр, область центра: $|x| < 1$, $|y| < 1$ (см. задачу 161). Граница области центра состоит из частных решений уравнения и особых точек; $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчиво.

1432. $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ — точки покоя; $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ устойчиво, $x \equiv 1$, $y \equiv 1$; $x \equiv -1$, $y \equiv 1$; $x \equiv -1$, $y \equiv -1$; $x \equiv 1$, $y \equiv$

$\equiv -1$ — условно устойчивы (рис. 74). 1441. l — нечетное: узел, если $b > 0$; седло, если $b < 0$; l — четное: седло — узел (при $b > 0$ в правой ($x > 0$) полуокрестности

точки $O(0, 0)$ расположена параболическая область, в левой ($x < 0$) — две гиперболические области, разделенные сепаратрисой; при $b < 0$ — наоборот). (Указание. Применить теорию нормальных областей Фроммера [38].)

1442. n — нечетное: узел, если $b > 0$; седло, если $b < 0$; n — четное: узел. (Указание. См. предыдущую задачу.) 1443. Центр. (Указание. Сделать замену $x+y=x_1$, $y=y_1$.) 1444.

Центр. (Указание. $Pdx + (y+Q)dy = 0$ — уравнение в полных дифференциалах, имеющее общий интеграл $U(x, y) = C$, где интеграл $U(x, y)$ — знакоопределенная функция.) 1445.

Центр. (Указание. Проблема центра и фокуса, причем поле направлений симметрично относительно осей координат.) 1446. Центр.

(Указание. Проблема центра и фокуса. Сделать замену $x+ay=x_1$, $y=y_1$, получим систему,

поле направлений которой симметрично относительно координатных осей.) 1447. 1) Вырожденное седло (к положению равновесия $O(0, 0)$ при-

мыкают две гиперболические области, разделенные сепаратрисой, имеющей в точке O точку возврата); 2) седло (к точке O примыкают четыре гиперболические

области, разделенные сепаратрисами, все сепаратрисы касаются оси Ox); 3) седло-узел (к точке O примыкают одна гиперболическая и одна эллиптическая обла-

сти, разделенные параболическими кривыми); 4) центр (ось Ox — ось симметрии поля направлений) (Указание. Проблема центра и фокуса (см. указание к задаче 1445).); 5) фокус (см. указание к задаче 1445); 6) седло-узел (к точке O

примыкают одна параболическая область и две гиперболические, разделенные сепаратрисой); 7) седло-узел (то же, что и в случае 3); 8) узел (причем все O -кривые касаются в точке O оси Ox). 1448. Седло-узел: к точке O примыкают одна параболическая и две гиперболические области. (Указание. Применить метод Фроммера.) 1450. (Указание. Показать, что подобласть $|\varphi - r| \leq |\ln r|^{-1/2}$ рассматриваемой нормальной области второго типа является аналогом нормальной области первого типа.) 1452. 1) Область центра совпадает со всей фазовой плоскостью (x, y) (Указание. Исследовать общий интеграл.); 2) область центра совпадает со всей плоскостью (x, y) (Указание. Исследовать общий интеграл, перейдя к полярным координатам ρ и φ и изучив ρ как функцию от φ .); 3) центр $O(0, 0)$ и два седла. Из каждого седла две сепаратрисы уходят в бесконечность, две другие идут в другое седло, ограничивая область центра; 4) то же, что и в третьем случае, и еще два вырожденных седла. Последние являются точками возврата для проходящих через них траекторий; 5) три центра и четыре седла. Сепаратрисы седел состоят из дуг замкнутой (через седла) кривой эллиптического типа и пересекающих ее двух ветвей кривой гиперболического типа. Получающиеся при этом три замкнутые области являются областями центров. 1453. $a < -2$.

1454. $a < -1$. 1460. $x = \sin e^t$, $y = \cos e^t$. 1467. $x = -\cos t$, $y = \sin t$. 1468. $x = -\cos t$, $y = \sin t$. 1473. Фокус. 1474. Фокус. 1475. $x(t) = At^2$ (A — произвольная

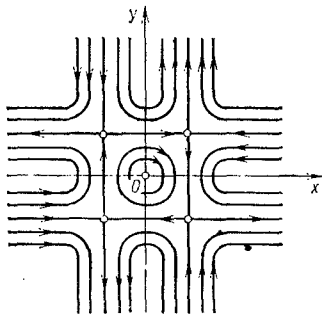


Рис. 74

постоянная). 1476. $\sum_{j=0}^{[t]} \frac{(t-j)^j}{j!}$. 1478. Решение. Пусть кратный корень $\lambda = \lambda_0$ существует. Тогда $P(\lambda_0) = 0$ и $P'(\lambda_0) = 0$. Это дает $\lambda_0 + a + be^{-\lambda_0 h} = 0$, $1 - hbe^{-\lambda_0 h} = 0$. Очевидно, что $P''(\lambda_0) \neq 0$. Найдем λ_0 : $\lambda_0 = -\frac{1}{h} \ln(hb)$. Подставляя это значение λ в исходное уравнение, получаем: $b = e^{-1 - ah}/h$ и $\lambda_0 = -(1+ah)/h$.

Уравнение запишется так: $y'(x) + ay(x) + \frac{e^{-1-ah}}{h} y(x-h) = 0$. 1479. $y(x) =$

$= C_1 \exp\left(-\frac{1+ah}{h}x\right) + C_2 x \exp\left(-\frac{1+ah}{h}x\right)$ (C_1, C_2 — произвольные постоянные).

1480. Решение. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$. Из $F(\lambda) = 0$ находим $\alpha = -a - be^{-\alpha h} \cos \beta h$, $\beta = be^{-\alpha h} \sin \beta h$. Предположим, что существует λ , для которого $\alpha \geq 0$. Тогда $\alpha = -a - be^{-\alpha h} \cos \beta h \leq -a + |b|e^{-\lambda h}$. Если $\alpha \geq 0$, то $e^{-\alpha h} \leq 1$, и тогда $\alpha \leq -a + |b|$, что противоречит предположению. 1481. Решение. Ха-

рактеристическим уравнением для данного дифференциального уравнения будет $\lambda + a + be^{-\alpha h} = 0$, откуда при $\lambda = \alpha + i\beta$ получаем $\alpha = -a - be^{-\alpha h} \cos \beta h$, $\beta = be^{-\alpha h} \sin \beta h$. Периодические решения могут возникать только при $\alpha = 0$, поэтому $-a - \cos \beta h = 0$, $\beta = b \sin \beta h$ или $\beta = \pm \sqrt{b^2 - a^2}$, $|b| > |a|$. Случай $|a| = |b|$ приводит к тому, что $a = -b$, тогда периодическое решение — произвольная константа. При $a = b$ периодических решений нет. При $|b| > |a|$ получаем семейство периодических решений $y(x) = A \sin(\sqrt{b^2 - a^2}x) + B \cos(\sqrt{b^2 - a^2}x)$ при соответствующих h . 1482. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 e^{-\lambda \tau} = 0$. Если

$\lambda = \alpha + i\beta$, то $\alpha^2 - \beta^2 + k^2 e^{-\lambda \tau} \cos \beta \tau = 0$, $2\alpha\beta - k^2 e^{-\alpha \tau} \sin \beta \tau = 0$, откуда $\alpha = \frac{k^2 e^{-\alpha \tau} \sin \beta \tau}{2\beta}$. Если $\tau \rightarrow +0$ и $e^{-\lambda \tau} \rightarrow 1$, то, как можно видеть из характе-

ристического уравнения, $\lambda^2 = -k^2$ и $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \pm k$. Тогда $\sin \beta \tau \rightarrow 0$ и, начиная с некоторого T , при $\tau < T - \frac{\sin \beta \tau}{\beta} > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \beta \tau < \frac{\pi}{2}$, следовательно, $\alpha =$

$= \frac{k^2 e^{-\alpha \tau} \sin \beta \tau}{2\beta} > 0$. 1483. Асимптотически устойчиво. 1484. Асимптотически

устойчиво. 1485. Неустойчиво. 1486. Асимптотически устойчиво. 1490. Решение. Составим вспомогательную счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = x_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Пусть $(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots)$ — наперед заданная внутренняя точка области, в которой определены правые части уравнений (1). Сначала поставим задачу: найти решение бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1), проходящее через точку $(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots)$. Решение этой задачи эквивалентно решению системы интегральных уравнений

$$x_k = x_k^{(0)} + \int_{t_0}^t x_{k+1}(\tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Отсюда следует

$$x_{k+1} = x_{k+1}^{(0)} + \int_{t_0}^t x_{k+2}(\tau) d\tau, \quad x_{k+2} = x_{k+2}^{(0)} + \int_{t_0}^t x_{k+3}(\tau) d\tau, \dots$$

Построим решение системы (2) методом последовательных приближений:

$$x_k^{(1)} = x_k^{(0)} + \int_{t_0}^t x_{k+1}^{(0)} d\tau, \quad x_k^{(1)} = x_k^{(0)} + x_{k+1}^{(0)} (t - t_0),$$

$$x_{k+1}^{(1)} = x_{k+1}^{(0)} + \int_{t_0}^t x_{k+2}^{(0)} d\tau, \quad x_{k+1}^{(1)} = x_{k+1}^{(0)} + x_{k+2}^{(0)} (t - t_0).$$

Вторые приближения:

$$\begin{aligned} x_k^{(2)} &= x_k^{(0)} + \int_{t_0}^t x_{k+1}^{(1)}(\tau) d\tau = x_k^{(0)} + \int_{t_0}^t (x_{k+1}^{(0)} + x_{k+2}^{(0)} (\tau - t_0)) d\tau = \\ &= x_k^{(0)} + x_{k+1}^{(0)} (t - t_0) + x_{k+2}^{(0)} \frac{(t - t_0)^2}{2!}, \end{aligned}$$

$$x_{k+1}^{(2)} = x_{k+1}^{(0)} + \int_{t_0}^t x_{k+2}^{(1)}(\tau) d\tau,$$

$$x_{k+2}^{(1)} = x_{k+2}^{(0)} + \int_{t_0}^t x_{k+3}^{(0)} d\tau = x_{k+2}^{(0)} + x_{k+3}^{(0)} (t - t_0).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} x_{k+1}^{(2)} &= x_{k+1}^{(0)} + \int_{t_0}^t (x_{k+2}^{(0)} + x_{k+3}^{(0)} (\tau - t_0)) d\tau = \\ &= x_{k+1}^{(0)} + x_{k+2}^{(0)} (t - t_0) + x_{k+3}^{(0)} \frac{(t - t_0)^2}{2!}. \end{aligned}$$

Третьи приближения:

$$\begin{aligned} x_k^{(3)} &= x_k^{(0)} + \int_{t_0}^t x_{k+1}^{(2)}(\tau) d\tau = \\ &= x_k^{(0)} + \int_{t_0}^t \left(x_{k+1}^{(0)} + x_{k+2}^{(0)} (\tau - t_0) + x_{k+3}^{(0)} \frac{(\tau - t_0)^2}{2!} \right) d\tau, \end{aligned}$$

откуда

$$x_k^{(3)} = x_k^{(0)} + x_{k+1}^{(0)} (t - t_0) + x_{k+2}^{(0)} \frac{(t - t_0)^2}{2!} + x_{k+3}^{(0)} \frac{(t - t_0)^3}{3!}, \dots,$$

m -е приближения:

$$\begin{aligned} x_k^{(m)} &= x_k^{(0)} + x_{k+1}^{(0)} (t - t_0) + x_{k+2}^{(0)} \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \\ &+ x_{k+3}^{(0)} \frac{(t - t_0)^3}{3!} + \dots + x_{k+m}^{(0)} \frac{(t - t_0)^m}{m!}, \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует, что решения системы дифференциальных уравнений (1), проходящее через точку $(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots)$, имеет вид

$$x_k = x_k^{(0)} + x_{k+1}^{(0)}(t - t_0) + x_{k+2}^{(0)} \frac{(t - t_0)^2}{2!} + x_{k+3}^{(0)} \frac{(t - t_0)^3}{3!} + \dots + x_{k+m}^{(0)} \frac{(t - t_0)^m}{m!} + \dots = \varphi_k(t, t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Так как правые части системы уравнений (1) удовлетворяют в некоторой области $H: t \geq 0, |x_k| \leq R$ ($k = 1, 2, \dots$), где R — любое заданное число, всем условиям теоремы существования и единственности решения счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1), то бесконечная система уравнений (3) однозначно разрешима относительно начальных данных $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots$, причем

$$x_k^{(0)} = \varphi_k(t_0, t, x_1, x_2, \dots) = x_k + x_{k+1}(t_0 - t) + x_{k+2} \frac{(t_0 - t)^2}{2!} + x_{k+3} \frac{(t_0 - t)^3}{3!} + \dots + x_{k+m} \frac{(t_0 - t)^m}{m!} + \dots \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Покажем теперь, что построенные нами функции $\varphi_k(t_0, t, x_1, x_2, \dots)$ и являются искомыми. Действительно,

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = -x_{k+1} - x_{k+2}(t_0 - t) - x_{k+3} \frac{(t_0 - t)^2}{2!} - \dots$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_s} = \begin{cases} 0 & \text{при } k < s, \\ 1 & \text{при } k = s, \\ \left. \begin{aligned} t_0 - t \\ \frac{(t_0 - t)^2}{2!} \\ \frac{(t_0 - t)^3}{3!} \\ \dots \end{aligned} \right\} & \text{при } k > s. \end{cases}$$

Подставляя все эти выражения в данное уравнение, получим

$$-x_{k+1} - x_{k+2}(t_0 - t) - x_{k+3} \frac{(t_0 - t)^2}{2!} - \dots - x_{k+m} \frac{(t_0 - t)^{m-1}}{(m-1)!} - \dots + \sum_{s=k}^{\infty} x_{s+1} \frac{(t_0 - t)^{s-k}}{(s-k)!} = 0.$$

Таким образом, каждая из функций $\varphi_k(t_0, t, x_1, x_2, \dots)$ является решением данного уравнения с частными производными первого порядка счетного числа переменных. **1491.** Пусть $(0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots)$ — заданная точка области H . Решение данной системы уравнений при начальных условиях:

$$x_k(0) = x_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

может быть построено методом последовательных приближений. Тем не менее легко проверить, что функции

$$x_k = e^{-t} \left(x_k^{(0)} + x_{k+1}^{(0)} t + x_{k+2}^{(0)} \frac{t^2}{2!} + \dots + x_{k+m}^{(0)} \frac{t^m}{m!} + \dots \right) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

представляют собой решение данной системы уравнений, удовлетворяющее начальным условиям (4), причем это решение равномерно ограничено. Действительно, так как $|x_k^{(0)}| \leq r$, то из равенства (5) имеем

$$|x_k| \leq r e^{-t} \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^m}{m!} + \dots \right) = r \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{при } t \neq 0, \\ 0 & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Эта функция, как известно, имеет производные всех порядков, которые обращаются в нуль при $t=0$. Нетрудно проверить, что функции

$$x_k = C e^{-t} \frac{d^{k-1} \varphi(t)}{dt^{k-1}} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

где C — некоторая постоянная, образуют решение данной системы и обращаются в нуль при $t=0$. Решение, определяемое равенствами (6), не будет равномерно непрерывным, и следовательно, и равномерно ограниченным. Очевидно, что у данной системы уравнений таких решений бесконечное множество. Так как она линейная, то сумма решений (5) и (6) также является ее решением, удовлетворяющим начальным условиям (3), причем это решение не будет равномерно ограниченным. Таким образом, непрерывность, равномерная ограниченность правых частей данной системы и выполнение для них условия Липшица не обеспечивают существования и единственности равномерно ограниченного решения. 1492. Решение. Подставляя ряд $x = x_0(t) + x_1(t)\mu + \dots$ в данное уравнение, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0(t)}{dt^2} + \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \mu + \dots + 2(x_0(t) + x_1(t)\mu + \dots) = \\ = \sin t + (x_0(t) + x_1(t)\mu + \dots)\mu. \end{aligned}$$

Приравняем свободные члены и члены при первой степени μ :

$$\frac{d^2 x_0(t)}{dt^2} + 2x_0(t) = \sin t, \quad \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + 2x_1(t) = x_0^2(t).$$

Первое из этих уравнений имеет единственное 2π -периодическое решение $x_0(t) = \sin t$. Подставляя его во второе уравнение, получим $\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + 2x_1(t) = \sin^2 t$.

Единственным 2π -периодическим решением последнего уравнения будет $x_1(t) = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{4}$. Поэтому искомое приближенное 2π -периодическое решение $x(t, \mu) \approx \sin t + \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos 2t}{4} \right) \mu$. 1493. Решение. Будем искать решение в виде ряда, расположенного по степеням параметра μ : $x = x_0 + x_1\mu + x_2\mu^2 + \dots$. Подставляя этот ряд в данное уравнение:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + \mu \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \mu^2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \dots + \omega^2 (x_0 + x_1\mu + x_2\mu^2 + \dots) =$$

$$= p \sin t + \mu (1 - x_0^2 - 2\mu x_0 x_1 - \mu^2 (2x_0 x_2 + x_1^2) - \dots) \times \\ \times \left(\frac{dx_0}{dt} + \mu \frac{dx_1}{dt} + \mu^2 \frac{dx_2}{dt} + \dots \right)$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ , получаем следующую систему линейных неоднородных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 &= p \sin t, \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 &= (1 - x_0^2) \frac{dx_0}{dt}, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 &= (1 - x_0^2) \frac{dx_1}{dt} - 2x_0 \frac{dx_0}{dt} x_1, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

откуда и определяются $x_0, x_1, x_2, \dots$ При интегрировании этих уравнений мы постараемся найти лишь такие их частные решения, которые имеют тот же период 2π , что и их правые части. Решением первого уравнения, как нетрудно видеть, будет

$$x_0 = \frac{p}{\omega^2 - 1} \sin t. \quad (8)$$

Это решение называется *нулевым приближением*. Подставляя найденное нулевое приближение (8) в правую часть второго уравнения системы (7), находим

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = \left(1 - \frac{p^2}{(\omega^2 - 1)^2} \sin^2 t \right) \frac{p \cos t}{\omega^2 - 1} \quad (9)$$

или $\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = a_1 \cos t + a_2 \cos 3t$, где $a_1 = \frac{4p(\omega^2 - 1)^2 - p^2}{4(\omega^2 - 1)^3}$, $a_2 = \frac{p^2}{4(\omega^2 - 1)^3}$. Из уравнения (9) определим

$$x_1 = \frac{4p(\omega^2 - 1)^2 - p^2}{4(\omega^2 - 1)^4} \cos t + \frac{p^3}{4(\omega^2 - 1)^3(\omega^2 - 9)} \cos 3t, \quad (10)$$

которое назовем *первым приближением*. Подставляя первое приближение (10) в правую часть третьего уравнения системы (7), после некоторых преобразований получаем

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = b_1 \sin t + b_2 \sin 3t + b_3 \sin 5t. \quad (11)$$

Частным решением уравнения (11) будет

$$x_2 = \frac{b_1}{\omega^2 - 1} \sin t + \frac{b_2}{\omega^2 - 9} \sin 3t + \frac{b_3}{\omega^2 - 25} \sin 5t.$$

Решение основного дифференциального уравнения во втором приближении

$$x \approx \frac{p}{\omega^2 - 1} \sin t + \left(\frac{4(\omega^2 - 1)^2 p - p^3}{4(\omega^2 - 1)^4} \cos t + \right.$$

$$+ \frac{p^3}{4(\omega^2 - 1)^3(\omega^2 - 9)} \cos 3t) \mu + \left(\frac{b_1}{\omega^2 - 1} \sin t + \right. \\ \left. + \frac{b_2}{\omega^2 - 9} \sin 3t + \frac{b_3}{\omega^2 - 25} \sin 5t \right) \mu^2.$$

1495. Нулевое приближение $x_0 = \cos t$, первое приближение $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t$, второе приближение $x_2 = \frac{3}{8} (-\cos t + \cos 3t)$. (У к а з а н и е. Поскольку λ меньше единицы и x изменяется от -1 до 1 , второй член данного уравнения может быть разложен в сходящийся ряд по степеням λx , так что

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)(m-(m+2)x^2)x^{m-1}\lambda^m. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) будем искать в виде ряда, расположенного по степеням λ :

$$x = x_0 + x_1\lambda + x_2\lambda^2 + \dots \quad (13)$$

Заметим, что при интегрировании последовательно приближенных уравнений появляются две произвольные постоянные, которые могут быть определены из условий $x=1$, $dx/dt=0$ при $t=0$, каково бы ни было значение λ . Из равенства (13) найдем:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= x_0(0) + x_1(0)\lambda + x_2(0)\lambda^2 + \dots, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_0}{dt} + \frac{dx_1}{dt}\lambda + \frac{dx_2}{dt}\lambda^2 + \dots \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, $x_0(0) = 1$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dots$, $\dot{x}_0(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$, $\dots$ **1496.** Все решения, пересекающие границу области $1 \leq |x| + |y| \leq \sqrt{6}$, входят в эту область, и в ней нет точек равновесия. Следовательно, в ней должны быть периодические решения. При $m = n+1$ система имеет периодическое решение $x = \sqrt{2} \cos at$, $y = \sqrt{2} \sin at$. **1500.** Решение. Преобразование A строится путем приведения уравнения $y' = Ax^n y^m$ к автономному виду $x = e^t$, $y = ue^{kt}$, где $k = \frac{1+n}{1-m}$, в результате чего

имеем $\dot{u} + \frac{1+n}{1-m} u = Au^n$. Преобразование B получается в результате разрешения уравнения $y' = Ax^v y^\mu$ относительно x , почленного дифференцирования и понижения порядка $y' = p$, $y'' = pp'$. Приведение к автономному виду $y = e^t$, $p = ue^{kt}$, $k = \frac{\mu+v}{v+1}$ дает уравнение $\dot{u} + \frac{v(1-\mu)}{1+v} u = A_1 u^{-1/v}$. Приравливанием соответствующих существенных параметров получаем алгебраическую систему $\frac{1+n}{1-m} = \frac{v(1-\mu)}{1+v}$, $m = -1/v$, откуда $\mu = -n$, $v = -1/m$. Следовательно,

образующая группы $f = B^{-1} \circ A$ определяется как преобразование $(mn) \xrightarrow{f} (-n, -1/m)$. Непосредственной проверкой

$$(m, n) \xrightarrow{f} \left(-n, -\frac{1}{m}\right) \xrightarrow{f} \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{f} \left(-\frac{1}{n}, -m\right) \xrightarrow{f} (m, n)$$

убеждаемся, что $f^4 = E$, поэтому исходное уравнение обладает циклической симметрией четвертого порядка в классе преобразований Q^+ . **1501.** Решение. При-

нение прямого метода дает переопределенную систему уравнений в частных производных:

$$g^n f^m (f_t + f_u u')^l (g_t + g_u u')^{3-l} = t^v u^m u'^\lambda (g f u - g u f t),$$

$$g u f u u - f u g u u = 0, \quad g t f t t - f t g t t = 0,$$

$$2 g u f t u + g t f u u - 2 f u g t u - f t g u u = 0,$$

$$2 g t f t u + g u f t t - 2 f t g t u - f u g t t = 0,$$

которая при произвольных m, n, l имеет единственное нетривиальное решение — преобразование годографа $r: (m, n, l) \rightarrow (n, m, 3-l)$. При $l=0$ добавляется решение $s: (m, n, 0) \rightarrow (m, -m, -n, -3, 0)$, заданное преобразованием $y = u/t$, $z = 1/t$, и комбинация $rs = sr$. Наконец, при $l=0$ и $m=2$ имеем преобразование

$$y = u t^{\frac{k}{1-2k}} + \frac{(n+2)(n+3)}{A} t^{-\frac{n+2}{1-2k}},$$

$$x = t^{\frac{1}{1-2k}} \left(k = \frac{1 \pm \sqrt{8n^2 + 40n + 49}}{2} \right),$$

г. е.

$$w: (2, n, 0) \rightarrow \left(2, -\frac{5}{2} \pm \frac{2n+5}{2\sqrt{8n^2+40n+49}}, 0 \right),$$

и всевозможные комбинации $ws = sw$, $wr = rw$ и т. д. Так как других решений система не имеет, построенная цепочка расширений максимальна в классе Q. 1502.

Решение. Последовательно применяя построенные в предыдущей задаче образующие r, w и s , получаем уравнение $y'' = B y^2$, которое после понижения порядка

$y' = p, y'' = p p'$ легко интегрируется в квадратурах: $\frac{p^2}{2} = \frac{B}{3} y^3 + C$. Обрат-

ные преобразования позволяют выразить интеграл исходного уравнения через эллиптические функции. 1503. Решение. Преобразование A строится аналогично зада-

че 1500, с добавлением понижения порядка $u = p, u' = p p'$ и масштабирования не-

зависимой переменной $\xi = \frac{2n+m-l+3}{m+l-1} u$, в результате чего получаем

$$p p' - p = -a(1-a)\xi + B \xi^m (p - a\xi)^l \left(a = \frac{n-l+2}{2n+m-l+3} \right).$$

Точно так же в преобразование B после RF-пары и приведения к автономному виду войдет такое же понижение порядка и преобразования

$$p = q u^{\lambda-1}, \quad \xi = \frac{\mu\lambda + 2\nu\lambda + \mu\nu + \lambda - 3\nu - 2\mu - 2}{(\lambda-2)(\lambda-\nu-2)} u^{2-\lambda}.$$

Окончательно получаем

$$q q' - q = -b(1-b)\xi + C \xi^{1/(\lambda-2)} (q - b\xi)^{(\nu-1)/\nu}$$

$$\left(b = \frac{(\lambda-2)(\mu+\nu+1)}{\mu\lambda + 2\nu\lambda + \mu\nu - 2\mu + \lambda - 3\nu - 2} \right).$$

Приравнивание соответствующих существенных параметров приводит к алгебраической системе: $m = 1/(\lambda-2)$, $l = (\nu-1)/\nu$, $a = b$, $a(1-a) = b(1-b)$, решение которой $\mu = -n/(n+1)$, $\nu = 1/(1-l)$, $\lambda = (2m+1)/m$ дает образующую $g, g' = E$. Присоединяя образующую r (задача 1501) и убеждаясь в том, что $(gr)^2 = E$, получаем группу диэдра D_3 . 1504. Решение. Сначала построим расшире-

ние группы D_3 (см. задачу 1503) при $l=0$. Можно воспользоваться образующей из задачи 1501, но идентичный результат получится и при анализе уравнений сравнения и алгебраической системы задачи 1503. Третье уравнение системы исчезает, а четвертое имеет два корня: $\mu_1 = -\frac{n}{n+1}$, $\mu_2 = -\frac{m+n+3}{m+n+2}$. Таким образом, группа D_3 расширяется до D_6 . Нетрудно видеть, что для построения дальнейших расширений необходимо, чтобы в множестве уравнений, связанных преобразованиями группы D_6 , появилось еще хотя бы одно уравнение вида $y'' = Ax^N y^M$. Исходное уравнение интегрируется с помощью преобразований:

$$\begin{aligned} y'' &= Ax^{-7/6} y^{-1/2} \xrightarrow{s} y'' = Ax^{-4/3} y^{-1/2} \xrightarrow{g} y'' = \\ &= A_1 x y^{-4} \xrightarrow{s} y'' = Ay^{-4}, \end{aligned}$$

и мы в конечном итоге приходим к уравнению с разделяющимися переменными **1505. Решение.** Последовательно проводя преобразование A^{-1} (см. задачу 1503), получаем легко интегрируемое уравнение $yy'' = B$. **1506. Решение.** Аналогично предыдущей задаче получаем уравнение $y'' = By^4$. **1507. Решение.** Пусть уравнение $y' = f(x, y)$ инвариантно относительно преобразования $x = g(X)$. Тогда $\frac{dy}{dX} = g'(X) f(g(X), y)$. В силу инвариантности $g'(X) f(g(X), y) = f(X, y)$.

откуда $g'(X) = \frac{f(X, y)}{f(g(X), y)} = \text{const}(y)$, поэтому $f(X, y) = F_1(X) F_2(y)$, и вспомогательное утверждение доказано. Теперь остается найти подстановку исходного уравнения, которая приведет преобразование к виду $u = U$, $x = a^2/X$. Нетрудно показать, что подстановка имеет вид $y = ux^{1/2}$, в результате чего исходное уравнение приводится к уравнению в полных дифференциалах путем умножения на интегрирующий множитель $2u'$. К полученному уравнению первого порядка применимо вспомогательное утверждение, доказанное выше. **1508. Решение.** Применяя преобразование A^{-1} (задача 1503), имеем уравнение $y'' = Bxy^{-5/3}$. Его интегрирование осуществляется по схеме

$$| y'' = Bxy^{-5/3} \xrightarrow{1} y'' = B_1 x^{-5/2} y^{-1/2} \xrightarrow{s} y'' = B_1 y^{-1/2}$$

с последующим понижением порядка, в результате чего получается уравнение с разделяющимися переменными. **1510.** Подпрограмма имеет вид: ИП3; ИП4; +; $F \sin$; ИП1; +; (Здесь предполагается, что параметр 2.25 занесен в регистр памяти П4).

№ п/п	x_n	$y_{Э-К}$	$y_{Р-К}$
1	1,5	2,4304865	2,4306129
2	1,6	2,6759348	2,6761919
3	1,7	2,9355404	2,935931
4	1,8	3,2082362	3,2087614
5	1,9	3,4927012	3,4933602
6	2,0	3,7873883	3,7881784
7	2,1	4,0905726	4,091489
8	2,2	4,4004172	4,4014527
9	2,3	4,7150515	4,7161966
10	2,4	5,0326546	5,0338971

1511. Подпрограмма имеет вид: ИПЗ; ИП4; $\times$; ИП1; $F \sin$; $\times$; 1; +; ИПЗ; Fx^2 ; ИП5; $\times$; —. (Здесь предполагается, что параметр 0,2 занесен в регистр памяти П4 и 1,5 — в регистр П5.)

№ п/п	x_n	$y_{Э-К}$	$y_{Р-К}$
1	0,1	0,099349835	0,09956886
2	0,2	0,19615993	0,19660686
3	0,3	0,28816581	0,28884537
4	0,4	0,37357611	0,37448351
5	0,5	0,45118343	0,45230053
6	0,6	0,52037339	0,52166813
7	0,7	0,58105292	0,5824823
8	0,8	0,63353212	0,63504731
9	0,9	0,67839316	0,67994517
10	1,0	0,71637062	0,71791502

1512. Подпрограмма имеет вид: ИПЗ; Fx^2 ; ИП5; $\times$; ИП1; ИП4; $\times$; +; . (Здесь предполагается, что параметры 1,6 и 0,5 занесены в регистры памяти П4 и П5 соответственно.)

№ п/п	x_n	$y_{Э-К}$	$y_{Р-К}$
1	0,1	0,31256801	0,31265088
2	0,2	0,34179025	0,3496503
3	0,3	0,38831376	0,38859195
4	0,4	0,45300859	0,45340613
5	0,5	0,53708934	0,53762972
6	0,6	0,64227117	0,6429905
7	0,7	0,77098208	0,77193761
8	0,8	0,92666807	0,92795303
9	0,9	1,1142543	1,1160248
10	1,0	1,3408753	1,3434013

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— 2-е изд.— М.: Наука, 1984.— 271 с.
2. Бибилов Ю. С. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.— 232 с.
3. Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям.— Мн.: Выш. шк., 1977.— 240 с.
4. Богданов Ю. С., Сыроид Ю. Б. Дифференциальные уравнения.— Мн.: Выш. шк., 1983.— 239 с.
5. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.— 3-е изд.— Мн.: Наука и техника, 1972.— 663 с.
6. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин, И. З. Штокало, П. С. Бондаренко и др.— Киев: Вища шк., 1974.— 471 с.
7. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения.— 4-е изд.— Мн.: Выш. шк., 1976.— 366 с.
8. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.— 4-е изд.— Мн.: Выш. шк., 1974.— 766 с.
9. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— 6-е изд.— М.: Наука, 1970.— 280 с.
10. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— 4-е изд.— М.: Наука, 1974.— 332 с.
11. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения: Примеры и задачи.— Киев: Вища шк., 1984.— 408 с.
12. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1980.— 231 с.
13. Федорук М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1980.— 352 с.
14. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.— 5-е изд.— М.: Наука, 1979.— 128 с.

Дополнительная

15. Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем.— М.: Наука, 1973.— 431 с.
16. Амелькин В. В., Садовский А. П. Математические модели и дифференциальные уравнения.— Мн.: Выш. шк., 1982.— 271 с.
17. Андреев А. Ф. Особые точки дифференциальных уравнений.— Мн.: Выш. шк., 1979.— 136 с.
18. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1966.— 576 с.
19. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.— 472 с.
20. Зубов В. И. Устойчивость движения.— М.: Наука, 1973.— 268 с.
21. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— 6-е изд.— М.: Наука, 1971.— 703 с.
22. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. Н. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Выш. шк., 1978.— 287 с.

23. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.— М.: Наука, 1981.— 398 с.
24. Матвеев Н. М., Доценко А. В. Математическое моделирование реальных процессов.— Л., 1985.— 32 с.
25. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения.— М.: Наука, 1976.— 319 с.
26. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1974.— 318 с.
27. Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости.— М.: Мир, 1971.— 288 с.
28. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— М.: Наука, 1985.— 127 с.
29. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М.: Наука, 1971.— 296 с.
30. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.— М.: Наука, 1972.— 718 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора	3
I. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной	5
1. Введение	5
2. Уравнение, не содержащее искомой функции	16
3. Уравнение, не содержащее независимой переменной	27
4. Уравнение с разделяющимися переменными	38
5. Однородное уравнение и простейшее уравнение, приводящееся к однородному	43
6. Обобщенное однородное уравнение	55
7. Линейное уравнение	57
8. Уравнение Бернулли	65
9. Уравнение Дарбу	67
10. Уравнение Риккати	68
11. Уравнение в полных дифференциалах	74
12. Интегрирующий множитель	78
13. Вопросы и задачи для повторения	82
II. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной	90
1. Введение	90
2. Уравнение n -й степени	91
3. Неполные уравнения	94
4. Уравнения Лагранжа и Клеро	97
5. Уравнения, разрешимые относительно y или x	100
6. Задача о траекториях	103
7. Вопросы и задачи для повторения	105
III. Уравнения высших порядков	108
1. Введение	108
2. Уравнение, содержащее только независимую переменную и производную порядка n	112
3. Уравнение, не содержащее искомой функции, и уравнение, не содержащее искомой функции и последовательных первых производных	116
4. Уравнение, не содержащее независимой переменной	120
5. Уравнение, однородное относительно искомой функции и ее производных	124
6. Обобщенное однородное уравнение	125
7. Уравнение, левая часть которого есть точная производная	127
8. Вопросы и задачи для повторения	129
IV. Линейные уравнения высших порядков	132
1. Введение	132
2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	136
3. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с постоянными коэффициентами	152

4. Понижение порядка линейных уравнений	158
5. Интегрирование с помощью степенных и обобщенных степенных рядов	162
6. Колебательный характер решений однородных линейных уравнений второго порядка	171
7. Вопросы и задачи для повторения	175
V. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	181
1. Введение	181
2. Общие методы интегрирования систем дифференциальных уравнений	187
3. Вопросы и задачи для повторения	196
VI. Линейные системы дифференциальных уравнений	199
1. Введение	199
2. Линейные системы с постоянными коэффициентами	202
3. Интегрирование линейных систем с помощью степенных рядов	219
4. Матричный метод интегрирования линейных систем	221
5. Вопросы и задачи для повторения	227
VII. Уравнения с частными производными первого порядка	232
1. Введение	232
2. Однородное линейное уравнение	234
3. Неоднородное линейное уравнение	237
4. Нелинейные уравнения	240
5. Вопросы и задачи для повторения	245
VIII. Разные задачи	248
Ответы	281
Литература	316